12

Vektorer

KAPITTELINNHOLD

12A Punkter i planet og rommet *000*
12B Vektorer i planet og rommet *000*
12C Sum og differanse av vektorer *000*
12D Parallelle vektorer *000*
12E Skalarproduktet *000*
12F Determinanter *000*
12G Vektorproduktet *000*
12H Areal og volum *000*

Tid	Varsel	Temp.	Nedbør	Vind
kl 0–6		12°	0 mm	Flau vind, 1 m/s fra øst
kl 6–12		10°	0 mm	Flau vind, 1 m/s fra øst
kl 12–18		14°	0 mm	Flau vind, 1 m/s fra nord-nordøst
kl 18–24		15°	0 mm	Svak vind, 3 m/s fra nord

Bildet er hentet fra Yr.no

Et fullstendig vindvarsel gir både styrken og retningen på vinden.

Vi må ta i bruk begrepet *vektor* for å kunne regne på slike størrelser, der retningen inngår som en del av størrelsen. Forflytning og kraft er andre eksempler på vektorstørrelser.

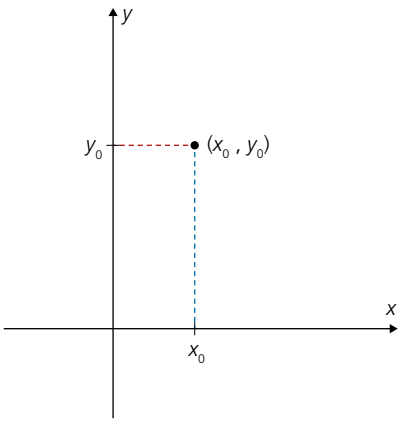
Størrelser som tid, temperatur og nedbørsmengde har ikke retning. De er fullstendig beskrevet ved en tallverdi. Slike størrelser kaller vi *skalarer*.

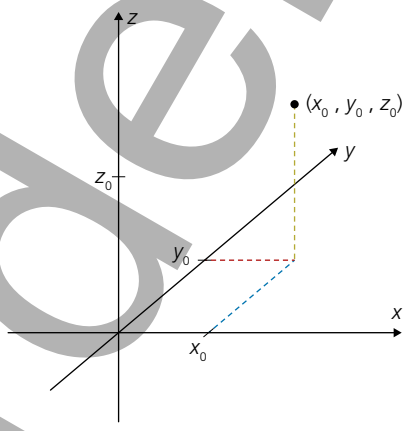
Tilvurdering

12A Punkter i planet og rommet

Et punkt har null dimensjoner, en linje har én dimensjon, et plan har to dimensjoner og rommet har tre dimensjoner.

Flere enn tre dimensjoner er ikke lett å se for seg, men i Einsteins relativitetsteori er det firedimensjonale *tidrommet* sentralt. I videre studier vil du raskt lære deg å regne med *n*-dimensjonale rom, men her skal vi holde oss til 2D og 3D.





For å beskrive plasseringen av et punkt i planet bruker vi et koordinatsystem med to akser som står vinkelrett på hverandre. Punktet har to koordinater.
De to aksene kaller vi vanligvis *x*-aksen og *y*-aksen, og pilene definerer positiv retning.

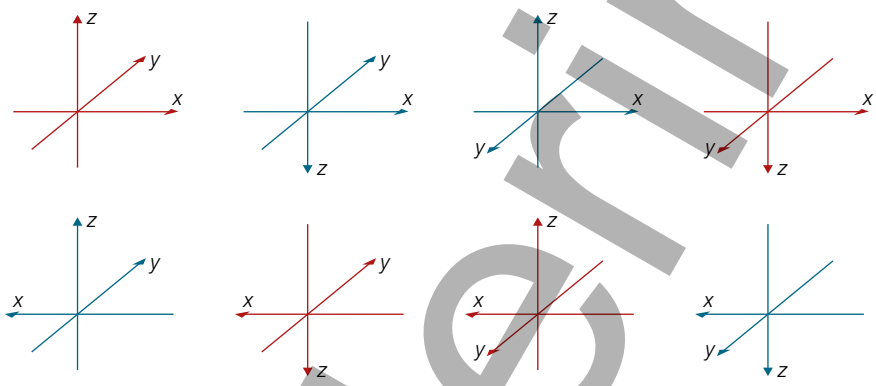
For å beskrive plasseringen av et punkt i rommet bruker vi et koordinatsystem med tre akser. Punktet har tre koordinater. Den nye aksen, *z*-aksen, står vinkelrett på både *x*-aksen og *y*-aksen. Legg merke til at punktet $(x_0 , y_0 , 0)$ i rommet svarer til punktet (x_0 , y_0) i planet.
Vi sier at punktet $(x_0 , y_0 , 0)$ er *projeksjonen* av punktet (x_0 , y_0 , z_0) ned i *xy*-planet.

Alle punkter i planet har to koordinater og alle punkter i rommet har tre koordinater.
Til alle ordnede tallpar (x , y) svarer det ett bestemt punkt i planet.
Til alle ordnede talltripler (x , y , z) svarer det ett bestemt punkt i rommet.

Til vurdering

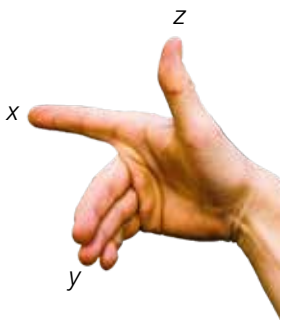
Høyrehåndssystemer

Vi vil stort sett holde oss til koordinatsystemer slik de er tegnet på forrige side. Ved å skifte positiv retning på aksene, kan vi imidlertid få fram $2 \cdot 2 = 4$ ulike koordinatsystemer i planet og $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ koordinatsystemer i rommet. Nedenfor har vi tegnet de mulige koordinatsystemene i rommet.



Vi skal bare bruke *høyrehåndssystemer*.
Slik kontrollerer du at et koordinatsystem er et høyrehåndssystem:

- La en strak pekefinger peke langs x-aksen.
- Bøy tre av fingrene slik at de peker langs y-aksen.
- Da skal tommelen peke langs z-aksen.

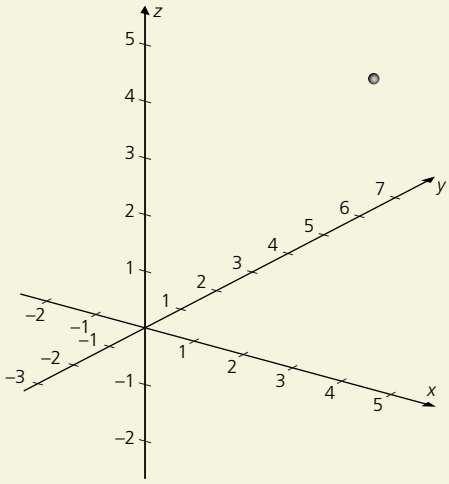


Hvis et koordinatsystem ikke er et høyrehåndssystem, er det et *venstrehåndssystem*.

SNAKK

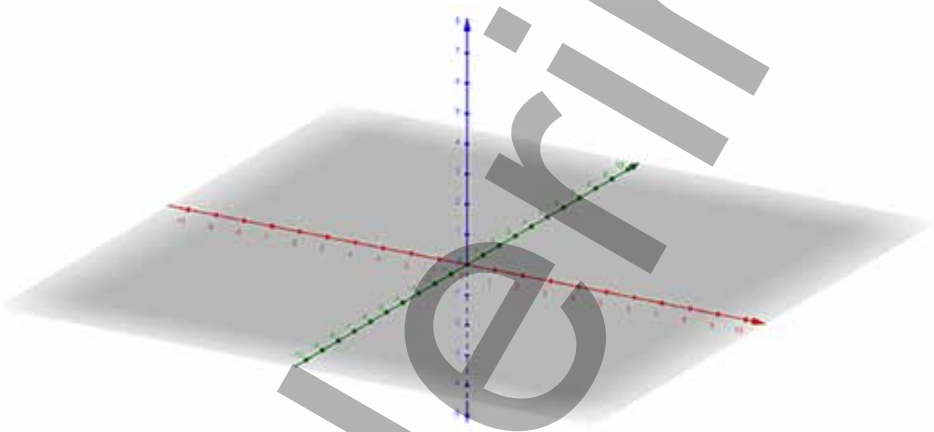
En todimensjonal tegning av et tredimensjonalt koordinatsystem kan bare gi en begrenset tredimensjonal effekt.

Vurder om det er punktet (1 , 5 , 3) eller punktet (4 , 1 , 5) som er tegnet inn i koordinatsystemet til høyre.



Tilvurdering

Vi anbefaler at du bruker GeoGebra aktivt for å støtte romforståelsen.
I Grafikkfelt 3D i GeoGebra er startbildet som vist til høyre. Koordinatsystemet er et høyrehåndssystem med rød *x*-akse, grønn *y*-akse og blå *z*-akse. Den grå fargen viser planet som *x*- og *y*-aksen ligger i, og kan vises eller skjules etter eget ønske. Når du har lagt inn punkter, linjer eller andre objekter, kan du gripe tak i dem med musepekeren og rotere for å se dem fra ulike synsvinkler.



12.1
Start GeoGebra, og vis Grafikkfelt 3D.

a Legg inn punktene (1 , 5 , 3) og (4 , 1 , 5).

Klikk og dra slik at du får sett punktene fra ulike synsvinkler.

b Er avstanden mellom punktene konstant eller varierende?
Klarer du å finne en synsvinkel som er slik at de to punktene faller sammen i ett punkt?

12.2
Bruk Grafikkfelt 3D i GeoGebra.

a Legg inn punktene $A(4 , 8 , -3)$, $B(-2 , 5 , -3)$, $C(-1 , 0 , -3)$, $D(5 , 5 , -3)$ og $E(4 , -3 , 6)$.

b Lag pyramiden *ABCDE* ved å bruke kommandoen Pyramide(A,B,C,D,E) eller verktøyet Pyramide, . Studer pyramiden fra ulike synsvinkler.

12.3
Bruk Grafikkfelt 3D i GeoGebra.

a Legg inn punktene $A(4 , 0 , 0)$, $B(0 , 5 , 0)$ og $C(0 , 0 , 3)$.

b Lag trekanten *ABC* ved å bruke verktøyet Mangekant, .

c Lag en pyramide med $\triangle ABC$ som grunnflate og høyde 6 ved å bruke verktøyet Ekstruder til pyramide, .

d Finn arealet av $\triangle ABC$ og volumet av pyramiden ved å se i Algebrafeltet.

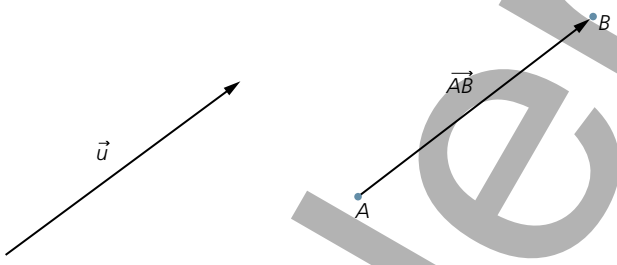
Vis at formelen $V = \frac{1}{3}Gh$ for volumet av en pyramide gjelder i dette tilfellet.

Tilvurdering

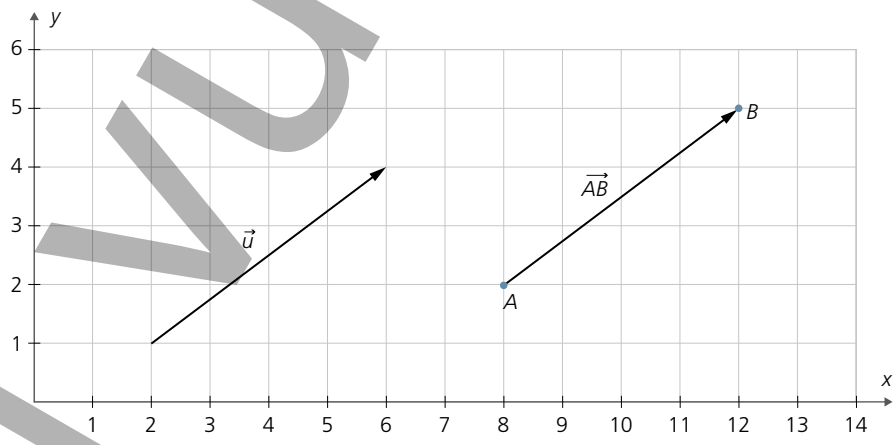
12B Vektorer i planet og rommet

Hva er en vektor?

En vektor er et linjestykke med retning.

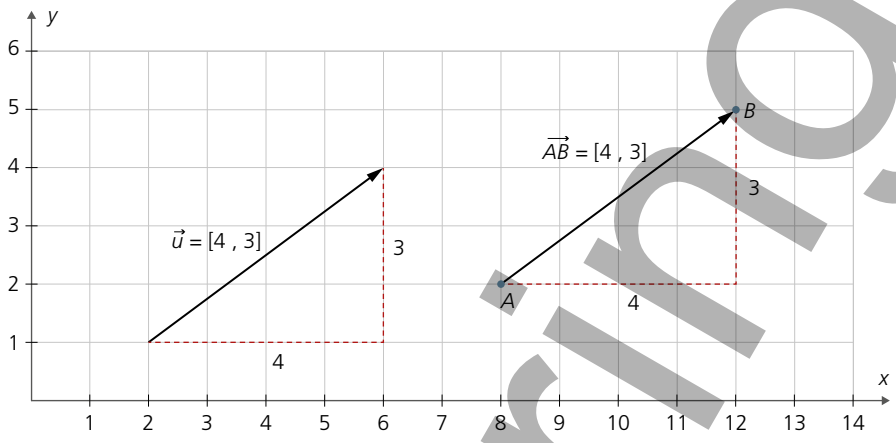


Ovenfor har vi tegnet to vektorer og satt navn på dem. Pila over navnet peker alltid mot høyre, og viser at det er en vektor. Vi leser $\vec{u}$ som «u-vektor» og $\overrightarrow{AB}$ som «AB-vektor». Skrivemåten $\overrightarrow{AB}$ forteller oss at vektoren starter i punktet A og slutter i punktet B.
Vi legger inn et todimensjonalt koordinatsystem for å beskrive de to vektorene nærmere.



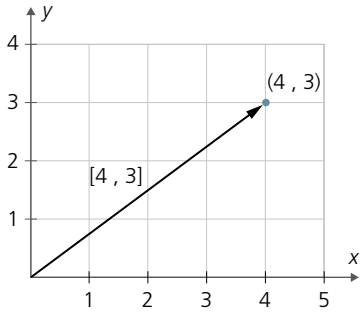
For å komme fra punkt A til punkt B kan vi gå 4 enheter rett til høyre og deretter 3 enheter rett oppover. Vi sier at $\overrightarrow{AB}$ går 4 enheter i positiv x-retning og 3 enheter i positiv y-retning, og at koordinatene til vektoren er [4 , 3].
Så ser vi på $\vec{u}$. Også denne vektoren går 4 enheter i positiv x-retning og 3 enheter i positiv y-retning. Altså har $\vec{u}$ de samme koordinatene som $\overrightarrow{AB}$.
De to vektorene er derfor like, $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = [4 , 3]$.

Tilvurdering

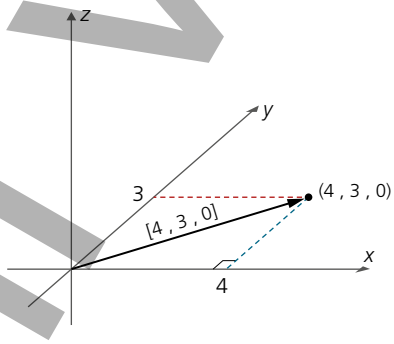


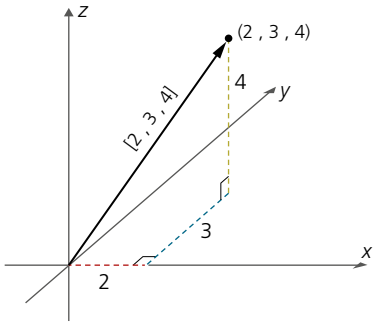
Vektorene $\vec{u}$ og $\overrightarrow{AB}$ har samme lengde og samme retning. Hvis vi, uten å rotere dem, flytter dem slik at de starter på samme sted, vil de overlappe hverandre perfekt.
Det spiller altså ingen rolle *hvor* vi tegner en vektor. Hvis vi flytter en vektor, regner vi den som samme vektor, bare vi passer på at retningen og lengden ikke blir endret.

Hvis vi tegner vektoren [4 , 3] med origo som startpunkt, blir (4 , 3) sluttpunktet for vektoren. Vektoren viser posisjonen til punktet i forhold til origo.
Vi sier at [4 , 3] er *posisjonsvektoren* til punktet (4 , 3).



På samme måte som punktet (4 , 3 , 0) i rommet svarer til punktet (4 , 3) i planet, svarer vektoren [4 , 3 , 0] i rommet til vektoren [4 , 3] i planet.
Se figuren til venstre. Figuren til høyre viser vektoren [2 , 3 , 4] tegnet med origo som startpunkt. Den ender da i punktet (2 , 3 , 4).





Til vurdering

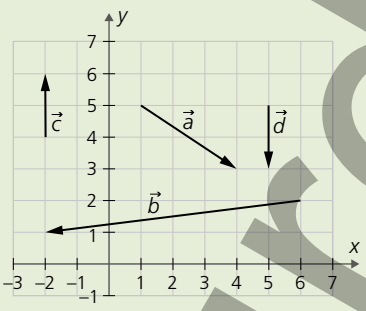
$[x\,,\,y]$ er en todimensjonal vektor som går x enheter i positiv x-retning og y enheter i positiv y-retning.
$[x\,,\,y\,,\,z]$ er en tredimensjonal vektor som går x enheter i positiv x-retning, y enheter i positiv y-retning og z enheter i positiv z-retning.
To vektorer er like når de har de samme koordinatene.

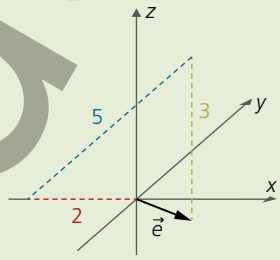
$$[x_1\,,\,y_1] = [x_2\,,\,y_2] \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = x_2 \;\wedge\; y_1 = y_2$$
$$[x_1\,,\,y_1\,,\,z_1] = [x_2\,,\,y_2\,,\,z_2] \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = x_2 \;\wedge\; y_1 = y_2 \;\wedge\; z_1 = z_2$$

Like vektorer har samme lengde og samme retning.

EKSEMPEL 1

Finn koordinatene til vektorene.
Er noen av vektorene like eller like lange?





$\vec{a} = [3\,,\,-2]$ fordi den går 3 enheter i positiv x-retning og 2 enheter i negativ y-retning.

$\vec{b} = [-8\,,\,-1]$ fordi den går 8 enheter i negativ x-retning og 1 enhet i negativ y-retning.

$\vec{c} = [0\,,\,2]$ fordi den går ingen enheter i x-retning og 2 enheter i positiv y-retning.

$\vec{d} = [0\,,\,-2]$ fordi den går ingen enheter i x-retning og 2 enheter i negativ y-retning.

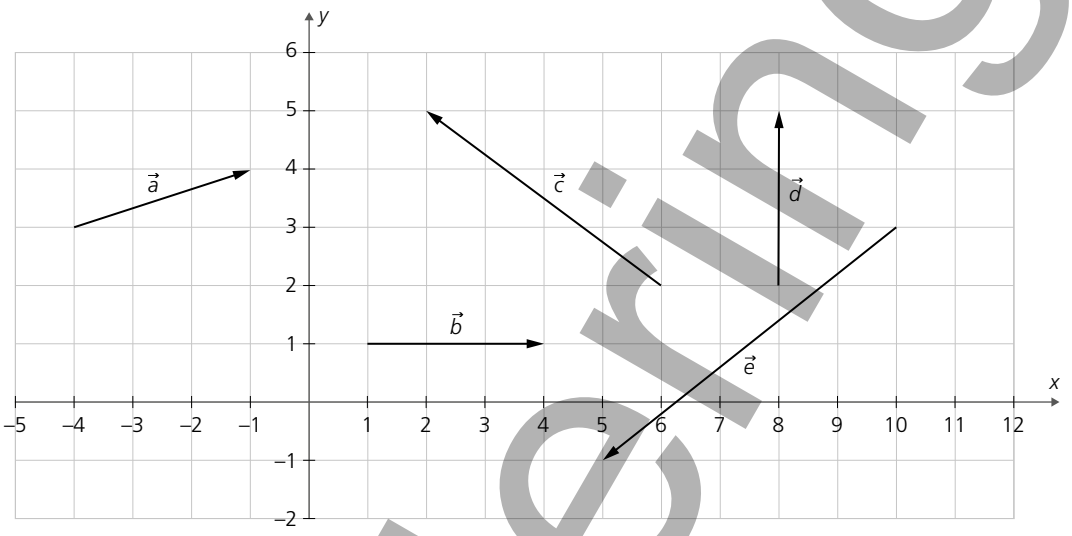
$\vec{e} = [-2\,,\,5\,,\,-3]$ fordi den går 2 enheter i negativ x-retning, 5 enheter i positiv y-retning og 3 enheter i negativ z-retning.

Vi kan se at $\vec{c}$ og $\vec{d}$ er like lange, men ingen av vektorene er like.

Tilvurdering

12.4

Ta for deg vektorene på figuren nedenfor.

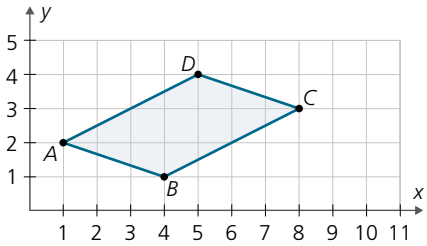


a Bestem koordinatene til vektorene.

b Tenk deg at vektorene blir tegnet med start i origo. Hvilket punkt ender da hver av vektorene i?

12.5

Punktene A, B, C og D danner en firkant slik figuren til høyre viser.



a Hva er posisjonsvektoren til punktet A?

b Skriv opp koordinatene til $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{DC}$. Er disse vektorene like?

c Skriv opp koordinatene til $\overrightarrow{BC}$ og $\overrightarrow{DA}$. Er disse vektorene like?

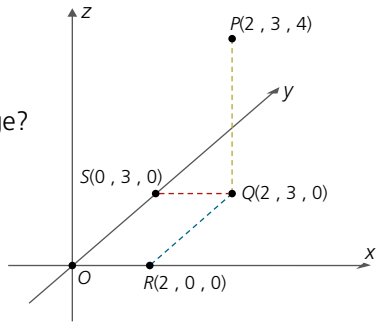
d Hvilken vektor er lik $\overrightarrow{BC}$?

e Hvilke vektorer er like lange som $\overrightarrow{AB}$?

f Hva kaller vi firkanten $ABCD$?

12.6

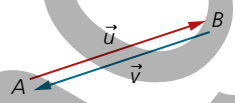
Bruk figuren til å finne koordinatene til vektorene $\overrightarrow{OR}$, $\overrightarrow{SQ}$, $\overrightarrow{RQ}$, $\overrightarrow{QP}$ og $\overrightarrow{PQ}$. Er noen av vektorene like eller like lange?



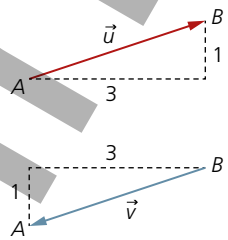
Tilvurdering

Motsatte vektorer

Gitt to punkter A og B.
Vektoren fra A til B er $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.
Vektoren fra B til A er $\vec{v} = \overrightarrow{BA}$.

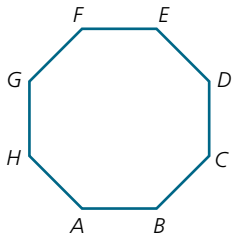


De to vektorene er like lange, men motsatt rettet.
Vi sier at $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er *motsatte* vektorer, og skriver
$\vec{u} = -\vec{v}$ eller $-\vec{u} = \vec{v}$.
Hvis $\vec{u}$ har koordinatene [3 , 1], har $\vec{v}$ koordinatene [–3 , –1].



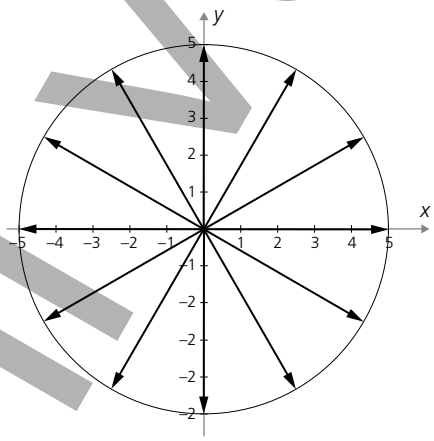
12.7
Hva er den motsatte vektoren til
a [3 , –4] **b** [5 , 0 , –2] **c** $\overrightarrow{PQ}$ **d** $\vec{p}$ **e** $-\vec{q}$

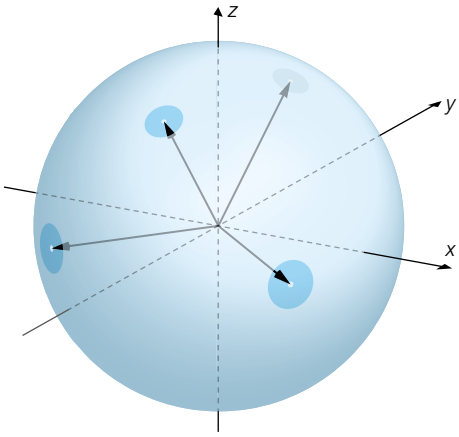
12.8
Figuren viser en regulær åttekant.
a Hvilken vektor er motsatt vektor til $\overrightarrow{AE}$?
b Hvilke vektorer er motsatte vektorer til $\overrightarrow{AB}$?



Lengden av en vektor

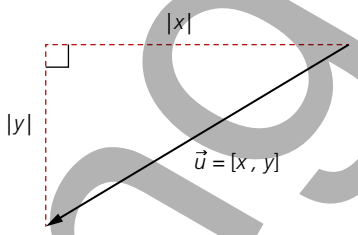
Lengden av en vektor kaller vi også *absoluttverdien* av vektoren. Hvis for eksempel vektoren $\vec{u}$ er 5 enheter lang, skriver vi $|\vec{u}| = 5$. Det gir *ikke* mening å skrive $\vec{u} = 5$, for da underslår vi at vektoren også har en retning. Det fins uendelig mange vektorer med lengde 5, både i planet og i rommet. Se figurene nedenfor.





Tilvurdering

Vi tar for oss en vilkårlig vektor i planet, $\vec{u} = [x, y]$.



Vi ser at $|\vec{u}|$ er lengden av hypotenusen i en rettvinklet trekant der lengden av katetene er absoluttverdien av vektorkoordinatene x og y. Ifølge pytagorassetningen har vi

$$|\vec{u}|^2 = |x|^2 + |y|^2$$
$$|\vec{u}|^2 = x^2 + y^2$$
$$|\vec{u}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

På tilsvarende måte kan vi utlede en formel for lengden av en tredimensjonal vektor.

Vektoren $\vec{u} = [x, y]$ har lengden $|\vec{u}| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Vektoren $\vec{u} = [x, y, z]$ har lengden $|\vec{u}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

EKSEMPEL 2

Finn lengden av vektorene $\vec{u} = [4, 3]$, $\vec{v} = [3, 6, -2]$ og $\vec{w} = [5t, 0, -2]$.

Vi bruker formlene for lengden av en vektor, og får

$$|\vec{u}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$
$$|\vec{v}| = \sqrt{3^2 + 6^2 + (-2)^2} = \sqrt{9 + 36 + 4} = \sqrt{49} = 7$$
$$|\vec{w}| = \sqrt{(5t)^2 + 0^2 + (-2)^2} = \sqrt{25t^2 + 4}$$

12.9

Finn lengden av vektorene.

$\vec{a} = [3, 4]$ $\quad \vec{b} = [-2, 0, 1]$ $\quad \vec{c} = [-7, 1]$ $\quad \vec{d} = [3t, e^t, -1]$

12.10

Bestem t slik at lengden av vektoren er 20.

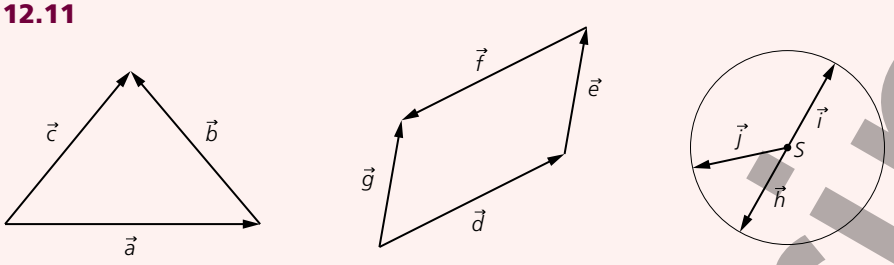
a $\vec{u} = [3t, 4t]$

b $\vec{v} = [18, -8, t]$

Tilvurdering

RØDE OPPGAVER

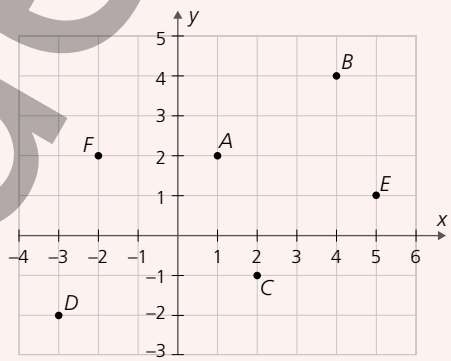
12.11



Ovenfor ser du en likebeint trekant, et parallellogram og en sirkel med sentrum i S.
Hvilke av de inntegnede vektorene på figuren er

a like
b like lange
c motsatte

12.12



a Finn posisjonsvektoren til punktet A.
b Finn vektorkoordinatene til $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$ og $\overrightarrow{AF}$.
c Finn $|\overrightarrow{AB}|$, $|\overrightarrow{AD}|$ og $|\overrightarrow{AF}|$.
d Hvilke vektorer har den samme absoluttverdien som $\overrightarrow{AB}$?
e Hva er romkoordinatene til A og $\overrightarrow{AB}$?

BLÅ OPPGAVER

12.13

Se oppgave 6.13.

a Bestem to vektorer som er like lange som $\overrightarrow{AB}$, men ikke lik $\overrightarrow{AB}$.
b Et punkt G er slik at $|\overrightarrow{AG}| = |\overrightarrow{DG}|$. Hvor kan punktet G ligge?

12.14

Hva er koordinatene til punktet Q hvis $\overrightarrow{PQ} = [2, 5, 4]$ og posisjonsvektoren til P er $[1, -3, 5]$?

12.15

Bestem t slik at lengden av vektoren $\vec{v} = [3t, t-2]$ er minst mulig på fire måter.

❶ Ved å legge inn en glider for t i GeoGebra og prøve deg fram.
❷ Ved å bruke en graftegner til å framstille $|\vec{v}|$ grafisk.
❸ Ved regning.
❹ Ved programmering.

til vurdering

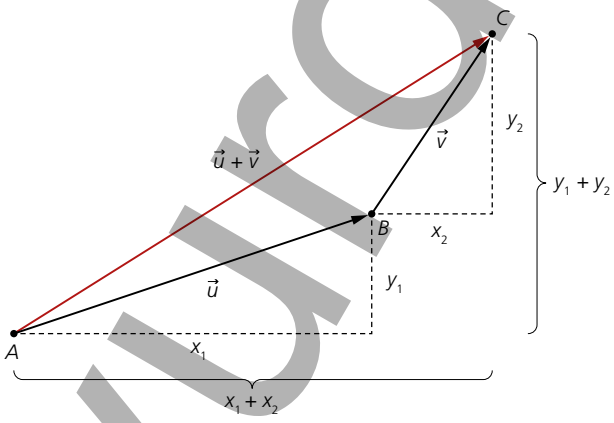
12C Sum og differanse av vektorer

Addisjon av vektorer

Gitt $\vec{u} = [x_1 , y_1]$ og $\vec{v} = [x_2 , y_2]$
Summen er vektoren $\vec{u} + \vec{v} = [x_1 + x_2 , y_1 + y_2]$.

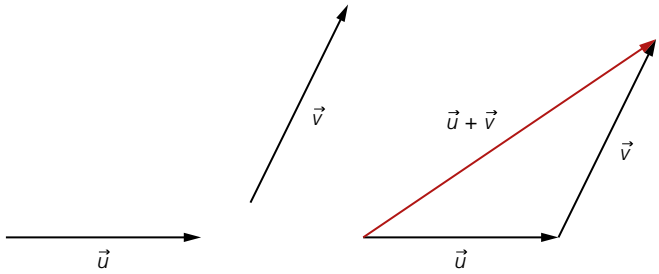
Gitt $\vec{u} = [x_1 , y_1 , z_1]$ og $\vec{v} = [x_2 , y_2 , z_2]$
Summen er vektoren $\vec{u} + \vec{v} = [x_1 + x_2 , y_1 + y_2 , z_1 + z_2]$.

Vi legger altså sammen to vektorer ved å legge sammen koordinatene hver for seg. Vi vil nå se hva denne definisjonen betyr geometrisk, og tar av praktiske årsaker utgangspunkt i en figur med todimensjonale vektorer.



Vi starter i punkt A og går til punkt B ved $\vec{u} = [x_1 , y_1] = \overrightarrow{AB}$.
Så går vi videre fra punkt B til punkt C ved $\vec{v} = [x_2 , y_2] = \overrightarrow{BC}$.
Samlet sett har vi gått fra punkt A til punkt C ved $\vec{u} + \vec{v} = [x_1 + x_2 , y_1 + y_2] = \overrightarrow{AC}$.
Altså er $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.
Dette gjelder generelt og er opphav til *trekantmetoden* for vektoraddisjon:

Når vi vil finne summen av $\vec{u}$ og $\vec{v}$, tegner vi først $\vec{u}$. Så tegner vi $\vec{v}$ slik at den starter der $\vec{u}$ slutter. Summen $\vec{u} + \vec{v}$ er nå vektoren som går fra der $\vec{u}$ starter til der $\vec{v}$ slutter.



Tilvurdering

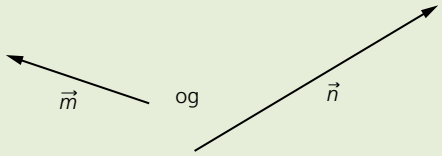
EKSEMPEL 3

Finn summen av vektorene.

a $\vec{a} = [3, 4]$ og $\vec{b} = [5, -3]$

b $\vec{c} = [-1, 3, 4]$ og $\vec{d} = [0, 2, -4]$

c



d $\overrightarrow{PQ}$ og $\overrightarrow{QR}$

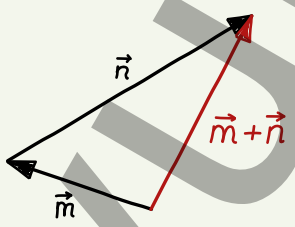
a Vi legger sammen koordinatene hver for seg, og får

$$\begin{aligned}\vec{a} + \vec{b} &= [3, 4] + [5, -3] \\ &= [3+5, 4+(-3)] \\ &= [8, 1]\end{aligned}$$

b Vi legger sammen koordinatene hver for seg, og får

$$\begin{aligned}\vec{c} + \vec{d} &= [-1, 3, 4] + [0, 2, -4] \\ &= [-1+0, 3+2, 4+(-4)] \\ &= [-1, 5, 0]\end{aligned}$$

c Vi tegner $\vec{n}$ slik at den starter der $\vec{m}$ slutter.
Summen er da vektoren tegnet med rødt på figuren.



d $\overrightarrow{PQ}$ slutter der $\overrightarrow{QR}$ begynner.
Derfor er $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$.

12.16

Finn summen av vektorene.

a $\vec{a} = [2, 4]$ og $\vec{b} = [6, 3]$

b $\vec{c} = [-5, 4, 0]$ og $\vec{d} = [5, -1, 8]$

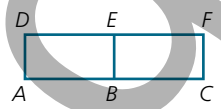
c $\overrightarrow{AB} = [2, 5, -1]$ og $\overrightarrow{CD} = [1, 7, -5]$

Tilvurdering

12.17

Figuren til høyre viser to like rektangler.

Skriv summene som én vektor som starter i punkt A.



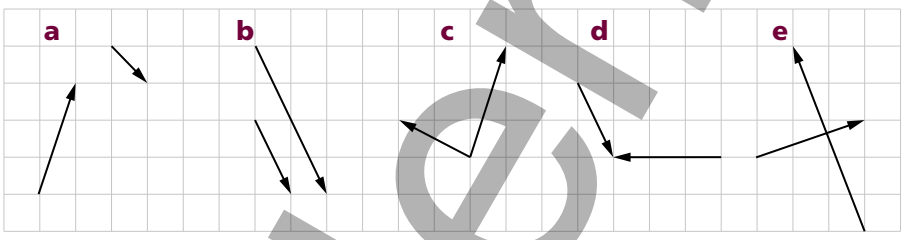
a $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}$

b $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$

c $\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{EA}$

12.18

For hver deloppgave skal du finne summen av vektorene ved tegning og deretter bestemme vektorkoordinatene til summen ved avlesning.



12.19

Når vi adderer flere enn to vektorer, legger vi også sammen førstekoordinatene og andrekoordinatene hver for seg. Tegner vi vektorene etter hverandre (den neste starter der den forrige slutter), så er summen vektoren som går fra starten av den første til slutten av den siste vektoren.

Finn summen av vektorene $\vec{u}$, $\vec{v}$ og $\vec{w}$ ved å

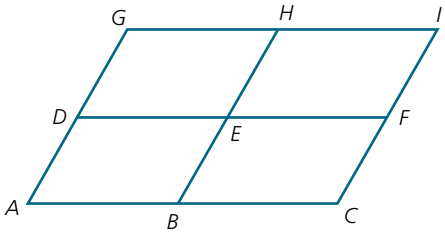
a regne

b tegne

12.20

Figuren til høyre viser fire like parallellogrammer.

Skriv summene som én vektor som starter i punkt A.



a $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{FI}$

b $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GH}$

c $\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{HG}+\overrightarrow{IF}$

Tilvurdering

Når vi adderer to reelle tall u og v, vet vi at $u+v=v+u$. Rekkefølgen ved addisjon spiller altså ikke noen rolle for resultatet. Dette er en *kommutativ* egenskap ved reelle tall.

Videre vet vi at $(u+v)+w=u+(v+w)$ for reelle tall. Det at vi kan plassere parenteser fritt når vi adderer flere tall, er en *assosiativ* egenskap ved reelle tall. Vektorer har også disse egenskapene.

Den kommutative loven for vektoraddisjon:

$$\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$$

Den assosiative loven for vektoraddisjon:

$$(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$$

Vi kan derfor skrive summen av tre vektorer uten parentes og la vektorene komme i den rekkefølgen vi ønsker, for eksempel $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$ eller $\vec{v}+\vec{u}+\vec{w}$.

UTFORSK

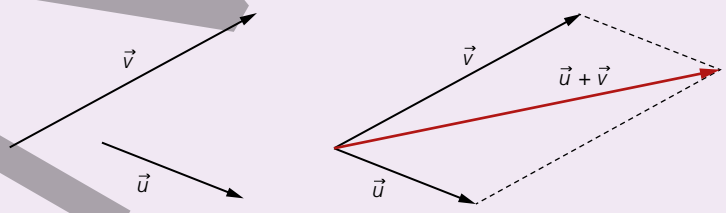
Edvart beviser den kommutative loven for vektoraddisjon slik:
La $\vec{u}=[x_1, y_1]$ og $\vec{v}=[x_2, y_2]$. Da er

$$\vec{u}+\vec{v}=[x_1, y_1]+[x_2, y_2]=[x_1+x_2, y_1+y_2]$$

og

$$\vec{v}+\vec{u}=[x_2, y_2]+[x_1, y_1]=[x_2+x_1, y_2+y_1]=[x_1+x_2, y_1+y_2]$$

Forklar hvordan Edvart har tenkt.
Susanne gir i stedet et geometrisk bevis:

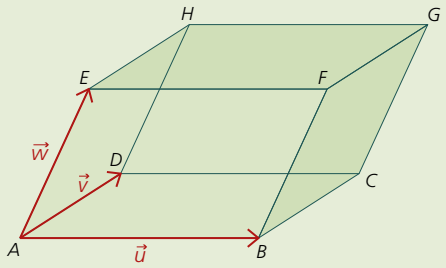


Forklar hvordan Susanne har tenkt.
Figurene i Susannes bevis viser også det vi kan kalle *parallellogrammetoden* for vektoraddisjon. Forklar denne metoden, og vurder fordeler og ulemper sammenliknet med trekantmetoden.
Bevis den assosiative loven for vektoraddisjon på to måter, etter mønster av bevisene ovenfor.

Tilvurdering

EKSEMPEL 4

Et parallellepiped er en romfigur med seks sideflater, der sideflatene er parvis parallelle. Da er alle sideflatene parallellogrammer.



I parallellepipedet *ABCDEFGH* setter vi $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$ og $\vec{w} = \overrightarrow{AE}$.
Finn $\overrightarrow{AG}$ og $\overrightarrow{BH}$ uttrykt ved $\vec{u}$, $\vec{v}$ og $\vec{w}$.

Vi går fra *A* til *G* ved å gå via *B* og *C*. Det gir

$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$$

Vi går fra *B* til *H* ved å gå via *A* og *D*. Det gir

$$\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DH} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = -\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$$

$\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{BA}$ er motsatte vektorer, så $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

12.21

Ta for deg parallellepipedet i eksempel 4.

a Hvilke av disse vektorene er lik $\vec{u}$?

$\overrightarrow{DC}$ $\overrightarrow{BC}$ $\overrightarrow{HG}$ $\overrightarrow{FE}$

b Hvilke av disse vektorene er en motsatt vektor til $\vec{v}$?

$\overrightarrow{DA}$ $\overrightarrow{BC}$ $\overrightarrow{GF}$ $\overrightarrow{GC}$

c Skriv $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$ så enkelt som mulig.

d Finn disse vektorene uttrykt ved $\vec{u}$, $\vec{v}$ og $\vec{w}$:

$\overrightarrow{AC}$ $\overrightarrow{HF}$ $\overrightarrow{DG}$ $\overrightarrow{CE}$

Til vurdering

Nullvektoren

Gitt to punkter A og B.
Vektoren fra A til B er $\overrightarrow{AB}$.
Vektoren fra B til A er $\overrightarrow{BA}$.
Summen av de to vektorene er

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}$$

$\overrightarrow{AA}$ er en vektor som starter og slutter i samme punkt. Den har derfor koordinatene [0 , 0] i planet og [0 , 0 , 0] i rommet, og lengde 0. Vi kaller denne vektoren for *nullvektoren*, og skriver $\vec{0}$.

12.22

a Bestem summen av [3 , –2 , 5] og [–3 , 2 , –5].
b Bestem t slik at $[2\,,t-3]+[-2\,,8]=\vec{0}$.
c Skriv uttrykket $\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QR}+\overrightarrow{RP}$ så enkelt som mulig.
d Bestem $\vec{u}+\vec{v}$ når $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er motsatte vektorer.
e Hvilket punkt i planet har $\vec{0}$ som posisjonsvektor?
f Hvilket punkt i rommet har $\vec{0}$ som posisjonsvektor?

Subtraksjon av vektorer

Differansen mellom $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er $\vec{u}-\vec{v}$. Vi kan se på dette uttrykket som summen av $\vec{u}$ og den motsatte vektoren til $\vec{v}$, det vil si $\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+(-\vec{v})$.

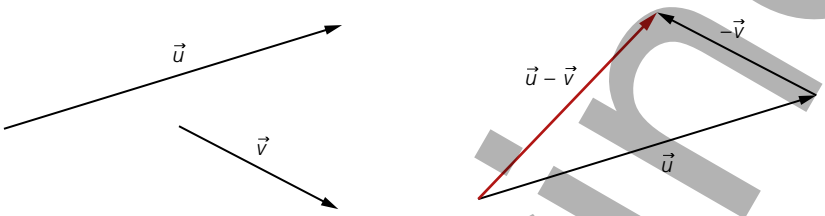
La $\vec{u}=[x_1\,,y_1\,,z_1]$ og $\vec{v}=[x_2\,,y_2\,,z_2]$.
Den motsatte vektoren til $\vec{v}$ er da $-\vec{v}=[-x_2\,,-y_2\,,-z_2]$.
Differansen mellom $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er derfor

$$\begin{aligned}\vec{u}-\vec{v}&=\vec{u}+(-\vec{v})\\&=[x_1\,,y_1\,,z_1]+[-x_2\,,-y_2\,,-z_2]\\&=[x_1+(-x_2)\,,\,y_1+(-y_2)\,,\;z_1+(-z_2)]\\&=[x_1-x_2\,,y_1-y_2\,,z_1-z_2]\end{aligned}$$

Gitt $\vec{u}=[x_1\,,y_1]$ og $\vec{v}=[x_2\,,y_2]$.
Differansen er vektoren $\vec{u}-\vec{v}=[x_1-x_2\,,y_1-y_2]$.
Gitt $\vec{u}=[x_1\,,y_1\,,z_1]$ og $\vec{v}=[x_2\,,y_2\,,z_2]$.
Differansen er vektoren $\vec{u}-\vec{v}=[x_1-x_2\,,y_1-y_2\,,z_1-z_2]$.

Til vurdering

Siden vi kan skrive differansen mellom to vektorer som summen $\vec{u}+(-\vec{v})$, kan vi bruke trekantmetoden for vektoraddisjon. På figuren nedenfor viser vi hvordan vi adderer $\vec{u}$ og $-\vec{v}$ for å finne $\vec{u}-\vec{v}$.



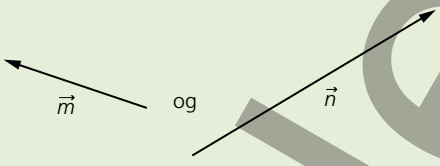
EKSEMPEL 5

Finn differansen mellom vektorene.

a $\vec{a}=[3\,,4]$ og $\vec{b}=[5\,,-3]$

b $\vec{c}=[-1,3\,,4]$ og $\vec{d}=[0\,,2\,,-4]$

c



d $\overrightarrow{PQ}$ og $\overrightarrow{RQ}$

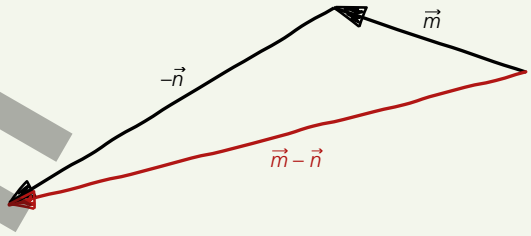
a Vi finner differansen mellom koordinatene hver for seg, og får

$$\begin{aligned}\vec{a}-\vec{b}&=[3\,,4]-[5\,,-3]\\&=[3-5\,,4-(-3)]\\&=[-2\,,7]\end{aligned}$$

b Vi finner differansen mellom koordinatene hver for seg, og får

$$\begin{aligned}\vec{c}-\vec{d}&=[-1,3\,,4]-[0\,,2\,,-4]\\&=[-1-0\,,3-2\,,4-(-4)]\\&=[-1,1,8]\end{aligned}$$

c Vi tegner $-\vec{n}$ slik at den starter der $\vec{m}$ slutter. Differansen er da vektoren tegnet med rødt på figuren.



d $\overrightarrow{RQ}$ og $\overrightarrow{QR}$ er motsatte vektorer.
Vi får derfor $\overrightarrow{PQ}-\overrightarrow{RQ}=\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{PR}$.

Til vurdering

12.23

Finn differansen mellom vektorene.

a $\vec{a} = [2, 4]$ og $\vec{b} = [6, 3]$

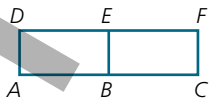
b $\vec{c} = [-5, 4, 0]$ og $\vec{d} = [5, -1, 8]$

c $\overrightarrow{AB} = [2, 5, -1]$ og $\overrightarrow{CD} = [1, 7, -5]$

12.24

Figuren viser to like rektangler.

Skriv differansene som én vektor som starter i punkt A.



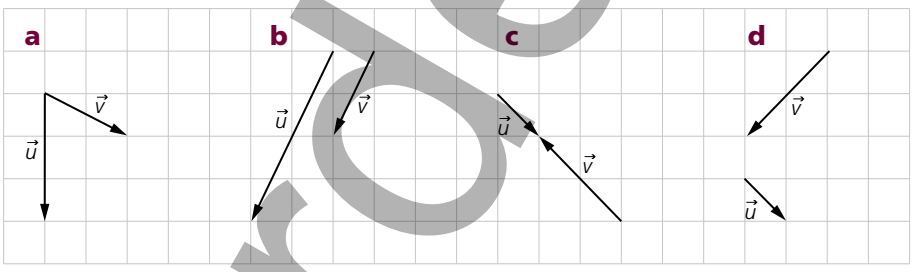
a $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{ED}$

b $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{EA}$

c $\overrightarrow{AF} - \overrightarrow{DE}$

12.25

For hver deloppgave skal du finne differansen $\vec{u} - \vec{v}$ ved tegning og deretter bestemme vektorkoordinatene til $\vec{u} - \vec{v}$ ved avlesning.

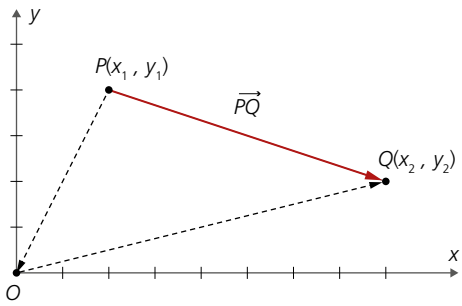


SNAKK

Fins det en kommutativ lov for vektorsubtraksjon? Begrunn svaret ditt.

Vektoren mellom to punkter

Vi vil finne vektoren som starter i punktet $P(x_1, y_1)$ og slutter i punktet $Q(x_2, y_2)$.



Vi kan gå fra P til Q direkte eller ved å gå via origo. Altså kan vi uttrykke $\overrightarrow{PQ}$ som en sum. Det gir

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OQ}\\ &= -\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}\\ &= \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}\\ &= [x_2, y_2] - [x_1, y_1]\\ &= [x_2 - x_1, y_2 - y_1]\end{aligned}$$

Tilvurdering

Vi ser at førstekoordinaten til vektoren er differansen mellom førstekoordinatene til punktene Q og P, og at andrekoordinaten er differansen mellom andrekoordinatene til Q og P. Litt upresist kan vi altså si at vi tar koordinatene til endepunktet minus koordinatene til startpunktet når vi skal finne vektoren mellom to punkter.

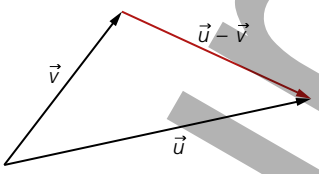
Vi får tilsvarende resultat om vi tar utgangspunkt i to tredimensjonale punkter.

Vektoren fra $P(x_1, y_1)$ til $Q(x_2, y_2)$ er
$\overrightarrow{PQ} = [x_2 - x_1, y_2 - y_1]$.

Vektoren fra $P(x_1, y_1, z_1)$ til $Q(x_2, y_2, z_2)$ er
$\overrightarrow{PQ} = [x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1]$.

Når vi har funnet vektoren mellom to punkter P og Q, kan vi finne avstanden mellom dem som lengden av $\overrightarrow{PQ}$, det vil si $\left|\overrightarrow{PQ}\right|$.

Legg videre merke til at utledningen ovenfor gir en alternativ geometrisk måte for å finne differansen mellom to vektorer. Hvis vi tegner vektorene $\vec{u}$ og $\vec{v}$ fra samme startpunkt, er $\vec{u} - \vec{v}$ vektoren fra slutten av $\vec{v}$ til slutten av $\vec{u}$.



EKSEMPEL 6

Vi har punktene $P(1, -2, 3)$ og $Q(-3, 4, 0)$.

a Bestem $\overrightarrow{PQ}$.

b Hva er avstanden mellom punktene?

a Vektoren fra P til Q er

$$\overrightarrow{PQ} = [-3-1, 4-(-2), 0-3] = [-4, 6, -3]$$

b Avstanden mellom punktene er lengden av vektoren fra P til Q.

$$\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{(-4)^2 + 6^2 + (-3)^2} = \sqrt{61}$$

Avstanden mellom P og Q er $\sqrt{61}$.

Til vurdering

12.26

Ta for deg punktene $A(0\ ,\ 1\ ,\ -2)$ og $B(-3\ ,\ 1\ ,\ 4)$.

a Bestem $\overrightarrow{AB}$.

b Bestem avstanden mellom A og B.

12.27

Ta for deg punktene $P(1\ ,\ 2)$, $Q(3\ ,\ 5)$ og $R(-2\ ,\ 4)$.

a Bestem $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{QR}$ og $\overrightarrow{RP}$.

b Hvor lang er sidene i trekanten PQR?

12.28

Ta for deg punktene $A(t\ ,1,-3)$ og $B(2\ ,-1,t-2)$.

a Finn $\overrightarrow{AB}$.

b Finn avstanden mellom punktene uttrykt ved t.

c For hvilken verdi av t er avstanden mellom punktene minst?

d Hva er den minst mulige avstanden mellom A og B?

EKSEMPEL 7

Vi har punktene $A(-3\ ,\ 1)$, $B(2\ ,\ 1)$ og $C(4\ ,\ 3)$.
Bestem koordinatene til et punkt D slik at firkanten $ABCD$ blir et parallellogram.

$ABCD$ er et parallellogram når $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.
Vi lar punktet D ha koordinatene $(x\ ,\ y)$. Det gir

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$$
$$[x-(-3)\ ,\ y-1] = [4-2\ ,\ 3-1]$$
$$[x+3\ ,\ y-1] = [2\ ,\ 2]$$
$$x+3=2 \quad \wedge \quad y-1=2$$
$$x=-1 \quad \wedge \quad y=3$$

Like vektorer har like koordinater.

$ABCD$ er et parallellogram når D har koordinatene $(-1\ ,\ 3)$.

Alternativt:
Vi setter opp et uttrykk for posisjonsvektoren til D.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OD} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD}\\ &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC}\\ &= [-3\ ,\ 1] + [4-2\ ,\ 3-1]\\ &= [-1\ ,\ 3]\end{aligned}$$

Av posisjonsvektoren ser vi at D har koordinatene $(-1\ ,\ 3)$.

12.29

Punktene $A(-4\ ,\ -3)$, $B(1\ ,\ 0)$ og $C(-1\ ,\ 4)$ er hjørner i parallellogrammet $ABCD$.
Finn koordinatene til punktet D.

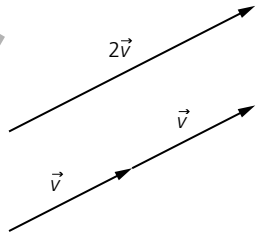
Tilvurdering

12.30
Punktene $A(2\ ,\ -1\ ,\ 5)$, $B(6\ ,\ -3\ ,\ 2)$ og $D(3\ ,\ 2\ ,\ 1)$ er hjørner i parallellogrammet $ABCD$. Finn koordinatene til punktet C.

Multiplikasjon av vektor med skalar (tall)

Hva skal vi mene med for eksempel $2\vec{v}$?
Det er naturlig å skrive $2\vec{v} = \vec{v} + \vec{v}$. Det er nok fordi vi er vant til at $2v = v + v$ når v er et tall. Vi setter $\vec{v} = [x\ ,\ y]$. Da blir

$$\begin{aligned} 2\vec{v} &= \vec{v} + \vec{v} \\ &= [x\ ,\ y] + [x\ ,\ y] \\ &= [x + x\ ,\ y + y] \\ &= [2x\ ,\ 2y] \end{aligned}$$



Dette antyder at multiplikasjon av en skalar med en vektor skjer ved å multiplisere hver koordinat med skalaren (tallet).

La $k \in \mathbb{R}$ og $\vec{v} = [x\ ,\ y]$.
Da er produktet av k og $\vec{v}$ gitt ved $k\vec{v} = [kx\ ,\ ky]$.

La $k \in \mathbb{R}$ og $\vec{v} = [x\ ,\ y\ ,\ z]$.
Da er produktet av k og $\vec{v}$ gitt ved $k\vec{v} = [kx\ ,\ ky\ ,\ kz]$.

Lengden av $2\vec{v}$ og $-2\vec{v}$ er dobbelt så stor som lengden av $\vec{v}$.
Generelt har vi at lengden av $k\vec{v}$ er $|k|$ ganger lengden av $\vec{v}$.

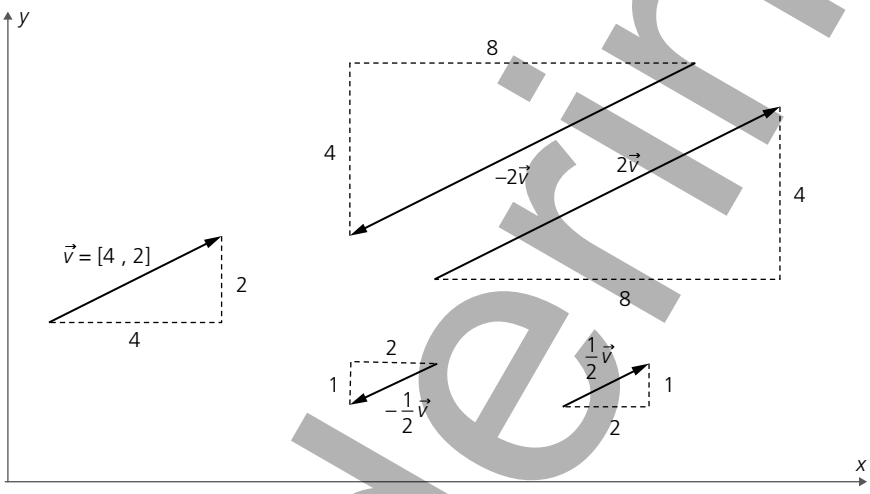
$$|k\vec{v}| = |k| \cdot |\vec{v}|$$

Vi viser dette for todimensjonale vektorer, utledningen for tredimensjonale er tilsvarende

$$\begin{aligned} |k\vec{v}| &= |[kx\ ,\ ky]| \\ &= \sqrt{(kx)^2 + (ky)^2} \\ &= \sqrt{k^2x^2 + k^2y^2} \\ &= \sqrt{k^2(x^2 + y^2)} \\ &= \sqrt{k^2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2} \\ &= |k| \cdot |[x\ ,\ y]| = |k| \cdot |\vec{v}| \end{aligned}$$

Til vurdering

Geometrisk innebærer $|k\vec{v}| = |k| \cdot |\vec{v}|$ at å multiplisere en vektor med et tall gir en ny vektor som har den samme eller den motsatte retningen, avhengig av fortegnet på tallet. Hvis tallet vi multipliserer med, har absoluttverdi større enn én, får vi en vektor som er lengre. Hvis absoluttverdien er mindre enn én, får vi en kortere vektor.



EKSEMPEL 8

Ta for deg vektorene $\vec{c} = [15\,,\,-30]$ og $\vec{p} = [1, -2]$.

a Bestem $-\frac{2}{3}\vec{c}$.

b Bestem lengden av $-7\vec{p}$.

c Bestem k slik at $\vec{c} = k\vec{p}$.

a $$-\frac{2}{3}[15\,,\,-30] = \left[-\frac{2}{3}\cdot 15\,,\,-\frac{2}{3}\cdot(-30)\right] = [-10\,,\,20]$$

Altså er $-\frac{2}{3}\vec{c} = [-10\,,\,20]$.

b $$|-7\vec{p}| = 7\cdot|\vec{p}| = 7\cdot\sqrt{1^2+(-2)^2} = 7\sqrt{5}$$

Lengden av $-7\vec{p}$ er $7\sqrt{5}$.

c Vi faktoriserer $\vec{c}$ og får

$$[15\,,\,-30] = [15\cdot 1\,,\,15\cdot(-2)] = 15[1\,,\,-2]$$

Altså er $\vec{c} = 15\vec{p}$, og da er $k = 15$.

Til vurdering

12.31
Vi har $\vec{v} = [-2, 4, 3]$. Bestem

a $3\vec{v}$ **b** $-5\vec{v}$ **c** $\frac{1}{2}\vec{v}$ **d** $0\vec{v}$

12.32
Vi vet at $|\vec{v}| = 12$. Bestem

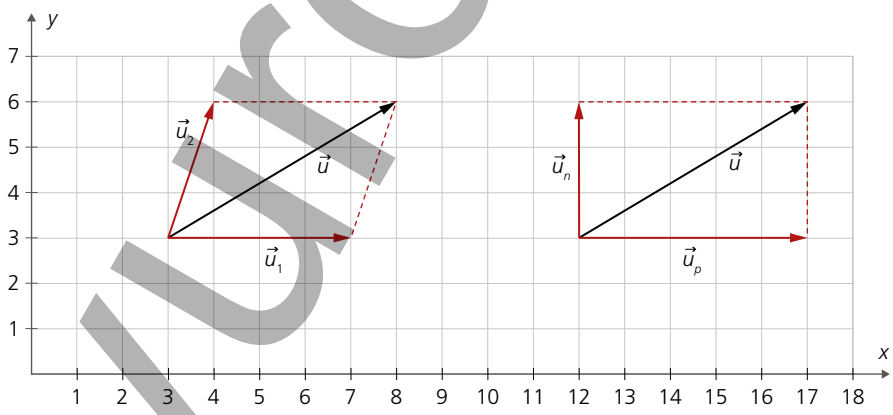
a $|4\vec{v}|$ **b** $|-3\vec{v}|$ **c** $\left|\frac{2}{3}\vec{v}\right|$ **d** $|0\vec{v}|$

12.33
Bestem k slik at $\vec{u} = k\vec{v}$ når $\vec{v} = [12, -2]$ og

a $\vec{u} = [24, -4]$ **b** $\vec{u} = [6, -1]$ **c** $\vec{u} = \left[1, -\frac{1}{6}\right]$ **d** $\vec{u} = \left[-4, \frac{2}{3}\right]$

Dekomponering av vektorer

Å skrive en vektor som summen av to andre vektorer kaller vi *dekomponering*. De to vektorene er *komponentene* til vektoren.
Vi kan dekomponere en gitt vektor på uendelig mange måter.
På figuren er den todimensjonale vektoren $\vec{u}$ dekomponert på to ulike måter.



Vi er som oftest interessert i å dekomponere en vektor slik at komponentene står vinkelrett på hverandre og er parallelle med aksene i et koordinatsystem, slik som til høyre i figuren ovenfor. Indeksene p og n refererer til at den ene komponenten er parallell med x-aksen og at den andre står normalt på x-aksen.

12.34
Dekomponer vektoren $\vec{u} = [2, 3]$ på fire ulike måter.

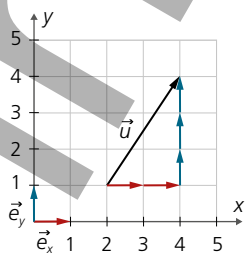
Tilvurdering

Enhetsvektorer

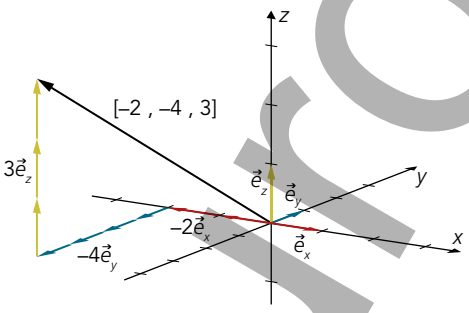
Vi vil nå forklare vektorkoordinater på en mer presis måte.
Som eksempel ser vi på $\vec{u} = [2, 3]$.
På figuren har vi tegnet inn *enhetsvektorene* $\vec{e}_x = [1, 0]$ og $\vec{e}_y = [0, 1]$.

Som navnet antyder, har enhetsvektorer lengde 1.
Vi kan se på $\vec{u} = [2, 3]$ som summen av to $\vec{e}_x$-vektorer og tre $\vec{e}_y$-vektorer:

$$\vec{u} = 2\vec{e}_x + 3\vec{e}_y$$



På tilsvarende måte kan vi uttrykke *alle* todimensjonale vektorer ved hjelp av de to enhetsvektorene $\vec{e}_x$ og $\vec{e}_y$.
For å gi en entydig beskrivelse av en tredimensjonal vektor, bruker vi i tillegg enhetsvektoren $\vec{e}_z$ langs den positive z-aksen. Skrivemåten $[-2, -4, 3]$ betyr altså $-2\vec{e}_x - 4\vec{e}_y + 3\vec{e}_z$.



$$[x, y] = x \cdot \vec{e}_x + y \cdot \vec{e}_y$$
$$[x, y, z] = x \cdot \vec{e}_x + y \cdot \vec{e}_y + z \cdot \vec{e}_z$$

12.35
Skriv vektorene uttrykt ved enhetsvektorer.
a $[-5, 2]$ **b** $[-5, 2, 0]$ **c** $[-5, 2, 3]$ **d** $[-5, 0, 3]$

12.36
Skriv vektorene uttrykt ved vektorkoordinater.
a $2\vec{e}_x - \vec{e}_y + 3\vec{e}_z$ **b** $\vec{e}_x + 5\vec{e}_z$ **c** $2\vec{e}_y - 3\vec{e}_z$

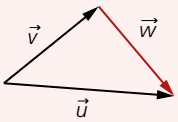
Tilvurdering

RØDE OPPGAVER

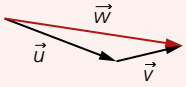
12.37

Avgjør for hver av figurene nedenfor om $\vec{w}$ er lik $\vec{u}+\vec{v}$, $\vec{u}-\vec{v}$ eller ingen av delene.

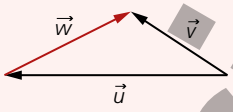
a



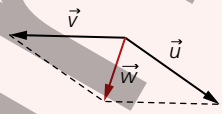
b



c

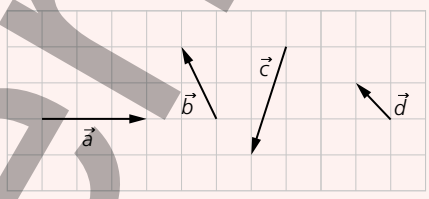


d



12.38

Finn svaret både ved regning og ved tegning.
Se figuren til høyre.

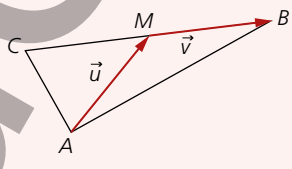


a $\vec{a}+\vec{b}$ **b** $\vec{c}-\vec{b}$

c $2\vec{a}+\vec{c}-3\vec{d}$ **d** $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}$

12.39

M er midtpunktet på siden BC i trekanten ABC.
Finn vektorene uttrykt ved $\vec{u}$ og $\vec{v}$.



a $\overrightarrow{AB}$ **b** $\overrightarrow{MC}$ **c** $\overrightarrow{AC}$ **d** $\overrightarrow{BA}$

12.40

Skriv $\vec{u}$ uttrykt ved $\vec{v}$ når

a $\vec{u}$ er dobbelt så lang som $\vec{v}$, og vektorene har samme retning

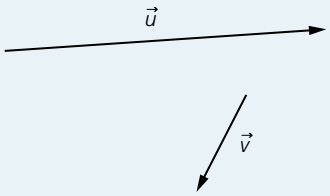
b $\vec{u}$ er halvparten så lang som $\vec{v}$, og vektorene har samme retning

c $\vec{u}$ er tre ganger så lang som $\vec{v}$, og vektorene har motsatt retning

BLÅ OPPGAVER

12.41

Anne er ute og padler i sterk strøm.
Hun har farten $\vec{u}$ i forhold til vannet.
Vannet har farten $\vec{v}$ i forhold til bunnen.
Tegn vektoren som viser farten Anne har i forhold til bunnen.



12.42

Finn punktene som har avstanden $2\sqrt{5}$ til punktet $A(4\,,2)$ og som ligger på

a x-aksen **b** y-aksen

12.43

Hva er den minst mulige avstanden mellom punktene $R(2-a\,,a\,,1)$ og $S(2a\,,3-a\,,1-a)$?

Tilvurdering

12D Parallelle vektorer

Vi vil nå definere hva vi mener med at to vektorer er *parallelle*.

$\vec{u}$ og $\vec{v}$ er parallelle hvis det fins et tall $k \in \mathbb{R}$ slik at $\vec{u} = k\vec{v}$.

$$\vec{u} \parallel \vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{u} = k\vec{v}$$

For eksempel kan vi si at vektorene $\vec{v}$, $2\vec{v}$, $-3\vec{v}$, $-\frac{4}{5}\vec{v}$ og $\vec{0}$ er parallelle med hverandre.
Siden vi kan velge $k = 0$, er $\vec{0}$ parallell med alle vektorer.
Med vektorkoordinater kan vi uttrykke definisjonen av parallelle vektorer ved hjelp av disse ekvivalensene:

$$[x_1, y_1] \parallel [x_2, y_2] \quad \Leftrightarrow \quad [x_1, y_1] = k[x_2, y_2]$$
$$[x_1, y_1, z_1] \parallel [x_2, y_2, z_2] \quad \Leftrightarrow \quad [x_1, y_1, z_1] = k[x_2, y_2, z_2]$$

EKSEMPEL 9

Avgjør om vektorene er parallelle.
a $\vec{u} = [5, -2]$ og $\vec{v} = [10, -4]$
b $\vec{u} = [3, 5, 2]$ og $\vec{v} = [6, 8, 4]$

a Vi ser at $[10, -4] = 2 \cdot [5, -2]$, eventuelt at $[5, -2] = \frac{1}{2} \cdot [10, -4]$.

Altså kan vi skrive $\vec{v} = 2\vec{u}$, eventuelt $\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{v}$.
Derfor er $\vec{u} \parallel \vec{v}$.

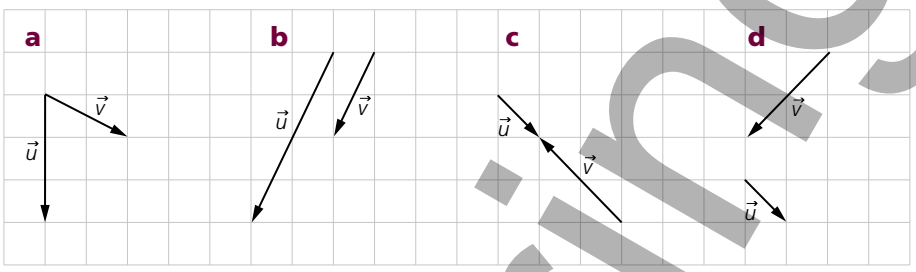
b Vi ser at $[6, 8, 4] = 2 \cdot [3, 4, 2]$.
Det er derfor umulig å finne et tall k slik at $\vec{u} = k\vec{v}$.
Derfor er $\vec{u} \nparallel \vec{v}$.

12.44
Avgjør om $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er parallelle.
a $\vec{u} = [8, 2]$ og $\vec{v} = [2, 8]$
b $\vec{u} = [5, -2]$ og $\vec{v} = [-5, 2]$
c $\vec{u} = [5, 0, 0]$ og $\vec{v} = [10, 0, 0]$
d $\vec{u} = [4, 2, 1]$ og $\vec{v} = [8, 4, 1]$

Tilvurdering

12.45

Avgjør om $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er parallelle. Uttrykk i så fall $\vec{u}$ ved hjelp av $\vec{v}$.



SNAKK

Per ser nærmere på vektorene i oppgave 12.44d.
Vektoren $\vec{v}$ er dobbelt så lang som $\vec{u}$.
Da må jeg kunne skrive $|\vec{v}| = 2 \cdot |\vec{u}|$, men vektorene er jo slett ikke parallelle, tenker Per.
Kan du oppklare for Per?

EKSEMPEL 10

Bestem s og t slik at vektorene $\vec{a} = [8, 12, t]$ og $\vec{b} = [s, 3, 5]$ er parallelle.

Hvis vektorene skal være parallelle, må det finnes et tall k slik at $\vec{a} = k \cdot \vec{b}$.
Det gir

$$[8, 12, t] = [ks, 3k, 5k]$$

Siden like vektorer har like koordinater, får vi tre likninger

$$8 = ks \quad \wedge \quad 12 = 3k \quad \wedge \quad t = 5k$$

Fra likningen $12 = 3k$ får vi $k = 4$.
Innsetting i de andre likningene gir $s = 2$ og $t = 20$.

12.46

Bestem s og t slik at $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er parallelle når $\vec{a} = [4, -3, s]$ og $\vec{b} = [-12, t, -6]$.

12.47

Bestem q og r slik at $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er parallelle.

a $\vec{a} = [r + 7, 12, q]$ og $\vec{b} = [q - 1, 3, 5 - r]$

b $\vec{a} = [r + 4, 8, q - 2]$ og $\vec{b} = [q + 3, 4, r^2 - 6]$

SNAKK

Hva må t være hvis $[0, 0, t]$ og $[1, 2, 3]$ skal være parallelle? Tolk resultatet.

Tilvurdering

EKSEMPEL 11

Undersøk om punktene $P(1\ ,\ 4\ ,\ 3)$, $Q(4\ ,\ 2\ ,\ 5)$ og $R(6\ ,\ -4\ ,\ 8)$ ligger på en rett linje.

Punktene ligger på en rett linje hvis for eksempel $\overrightarrow{PQ}$ og $\overrightarrow{PR}$ er parallelle.
I så fall fins det et tall k slik at $\overrightarrow{PQ} = k \cdot \overrightarrow{PR}$.
Vi setter inn vektorkoordinatene og løser vektorlikningen.

$$\overrightarrow{PQ} = k \cdot \overrightarrow{PR}$$
$$[3\ ,\ -2\ ,\ 2] = k \cdot [5\ ,\ -8\ ,\ 5]$$
$$[3\ ,\ -2\ ,\ 2] = [5k\ ,\ -8k\ ,\ 5k]$$
$$3 = 5k \quad \wedge \quad -2 = -8k \quad \wedge \quad 2 = 5k$$
$$k = \frac{3}{5} \quad \wedge \quad k = \frac{1}{4} \quad \wedge \quad k = \frac{2}{5}$$

Siden vi får ulike verdier for k, fins det ikke ett tall k slik at $\overrightarrow{PQ} = k \cdot \overrightarrow{PR}$.
Det vil si at $\overrightarrow{PQ} \nparallel \overrightarrow{PR}$. P, Q og R ligger derfor ikke på en rett linje.

12.48
Undersøk om punktene ligger på en rett linje.
a $A(2\ ,\ 5\ ,\ 1)$, $B(4\ ,\ 8\ ,\ 2)$ og $C(8\ ,\ 14\ ,\ 3)$
b $D(-3\ ,\ 1\ ,\ 2)$, $E(2\ ,\ 0\ ,\ 7)$ og $F(7\ ,\ -1\ ,\ 12)$

Til vurdering

Regneregler

La a og b være reelle tall (skalarer) og $\vec{u}$ og $\vec{v}$ være vilkårlige vektorer. Da er

$$a(\vec{u}+\vec{v}) = a\vec{u}+a\vec{v}$$

$$a\vec{u}+b\vec{u} = (a+b)\vec{u}$$

$$a(b\vec{u}) = (ab)\vec{u}$$

UTFORSK

Regnereglene ovenfor virker kanskje opplagt? Det er i så fall fordi du kjenner til de tilsvarende reglene for regning med tall. Vi må bevise dem ut fra det vi har definert så langt (addisjon av vektorer og multiplikasjon av vektor med skalar) og det vi har av regneregler for reelle tall.
Ta for deg bevisene nedenfor. Hvor i bevisene bruker vi det vi har definert?

La $\vec{u} = [x_1, y_1]$ og $\vec{v} = [x_2, y_2]$. Da er

$$\begin{aligned} a(\vec{u}+\vec{v}) &= a([x_1, y_1]+[x_2, y_2]) \\ &= a[x_1+x_2, y_1+y_2] \\ &= [a(x_1+x_2), a(y_1+y_2)] \\ &= [ax_1+ax_2, ay_1+ay_2] \\ &= [ax_1, ay_1]+[ax_2, ay_2] \\ &= a[x_1, y_1]+a[x_2, y_2] \\ &= a\vec{u}+a\vec{v} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a\vec{u}+b\vec{u} &= a[x_1, y_1]+b[x_1, y_1] \\ &= [ax_1, ay_1]+[bx_1, by_1] \\ &= [ax_1+bx_1, ay_1+by_1] \\ &= [(a+b)x_1, (a+b)y_1] \\ &= (a+b)[x_1, y_1] \\ &= (a+b)\vec{u} \end{aligned}$$

Bevis på tilsvarende måte at regnereglene holder for tredimensjonale vektorer.

EKSEMPEL 12

Undersøk om $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er parallelle, gitt at $\vec{a} \nparallel \vec{b}$.

$$\vec{u} = \vec{a}+3(\vec{a}-\vec{b})$$
$$\vec{v} = -2(4\vec{a}-5\vec{b})-4\vec{b}$$

Vi forenkler de to uttrykkene.

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \vec{a}+3(\vec{a}-\vec{b}) \\ &= \vec{a}+3\vec{a}-3\vec{b} \\ &= 4\vec{a}-3\vec{b} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{v} &= -2(4\vec{a}-5\vec{b})-4\vec{b} \\ &= -8\vec{a}+10\vec{b}-4\vec{b} \\ &= -8\vec{a}+6\vec{b} \\ &= -2(4\vec{a}-3\vec{b}) \\ &= -2\vec{u} \end{aligned}$$

Vi har at $\vec{v} = -2\vec{u}$. Altså er $\vec{u} \parallel \vec{v}$.

Til vurdering

Merk!
I eksempel 12 var det gitt at $\vec{a} \nparallel \vec{b}$. Det er en viktig forutsetning, for ellers ville både $\vec{u}$ og $\vec{v}$ kunne uttrykkes ved for eksempel $\vec{a}$ alene. Og da ville $\vec{u}$ og $\vec{v}$ uansett ha vært parallelle.

12.49
Skriv så enkelt som mulig.

a $4(\vec{u}-2\vec{v})-2(2\vec{u}-\vec{v})$

b $4\left(\frac{1}{2}\vec{u}-\vec{v}\right)-\frac{2}{3}\left(\vec{u}+\frac{3}{4}\vec{v}\right)$

12.50
Undersøk om $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er parallelle, gitt at $\vec{a} \nparallel \vec{b}$.

a $\vec{u}=\vec{a}+\vec{b}$
$\vec{v}=3\vec{a}+3\vec{b}$

b $\vec{u}=2\vec{a}-\vec{b}$
$\vec{v}=\vec{b}-2\vec{a}$

c $\vec{u}=2\vec{a}-(\vec{a}-\vec{b})$
$\vec{v}=2(4\vec{a}-\vec{b})-4\vec{b}$

12.51
Vi har vektorene $\vec{u}=[3\,,2]$, $\vec{v}=[-1,4]$ og $\vec{w}=[0\,,5]$. Regn ut koordinatene til

a $\vec{u}+5\vec{v}$

b $2\vec{u}-\vec{v}-3\vec{w}$

c $\frac{2}{3}\vec{u}-\frac{1}{4}\vec{v}+\vec{w}$

12.52
Ta for deg vektorene $\vec{u}=[1\,,2\,,3]$, $\vec{v}=[5\,,-2\,,1]$ og $\vec{w}=[7\,,0\,,5]$. Regn ut

a $-4\vec{v}$

b $3\cdot(\vec{u}+\vec{v})$

c $5\cdot(2\vec{w})$

d $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$

e $\vec{u}-\vec{v}+\vec{w}$

f $-3\vec{u}+\vec{v}+2\vec{w}$

Til vurdering

RØDE OPPGAVER

12.53

Ta for deg vektorene $\vec{u} = [3, 2, 1]$, $\vec{v} = [6, 4, 1]$ og $\vec{w} = [-3, s, t]$.

a Regn ut $-5 \cdot (-2\vec{u})$.

b Regn ut $5\vec{u} - 2\vec{v}$.

c Undersøk om $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er parallelle.

d Regn ut $3 \cdot (\vec{u} + 2\vec{v})$.

e Regn ut $\vec{v} + 2\vec{w}$.

f Bestem s og t slik at $\vec{u} \parallel \vec{w}$.

g Bestem s og t slik at $\vec{v} \parallel \vec{w}$.

12.54

Ta for deg punktene $A(3, 0, 0)$, $B(0, -2, 0)$, $C(0, 0, 4)$ og $D(2, 3, 1)$.
Undersøk om noen av punktene C og D ligger på den rette linja gjennom A og B.

BLÅ OPPGAVER

12.55

Punktet A ligger på y-aksen og punktet B ligger på z-aksen. Videre er punktet $C(2, 3, 1)$ gitt.
Avstanden fra A til C er 3, og avstanden fra B til C er 7.

a Hva kan koordinatene til A være?

b Hva kan koordinatene til B være?

c Finn koordinatene til et punkt D slik at firkanten $ABCD$ er et parallellogram med minst mulig omkrets.

12.56

Punktene $A(-4, -3)$, $B(1, 2)$ og $C(-1, 3)$ er hjørner i trapeset $ABCD$, der $AB \parallel CD$.

Det siste hjørnet ligger på linja med likningen $y = -\frac{1}{2}x - 2$. Bestem koordinatene til D.

12.57

Punktene $A(8, 1, 3)$ og $B(2, -8, 5)$ er endepunktene på linjestykket AB.
Finn koordinatene til et punkt C på AB når du får vite at C deler AB i forholdet $2:1$.

12.58

Punktene $A(-2, 1)$, $B(1, -3)$, $C(4, 2)$ og $D(a, 5)$ er hjørnene i trapeset $ABCD$.
Bruk vektorregning til å bestemme hvilke verdier a kan ha?

Til vurdering

12E Skalarproduktet

Det fins to ulike måter å definere multiplikasjon av vektorer på:

- Skalarproduktet (prikkproduktet) $\vec{u} \cdot \vec{v}$
- Vektorproduktet (kryssproduktet) $\vec{u} \times \vec{v}$

En viktig forskjell er at skalarproduktet er et tall (en skalar), mens vektorproduktet er en vektor. Vi kommer tilbake til vektorproduktet i kapittel 12G.

Skalarproduktet av to vektorer finner vi ved å multiplisere koordinatene hver for seg og legge sammen. Resultatet er et tall.

Gitt $\vec{u} = [x_1, y_1]$ og $\vec{v} = [x_2, y_2]$.
Skalarproduktet av vektorene er $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 x_2 + y_1 y_2$.

Gitt $\vec{u} = [x_1, y_1, z_1]$ og $\vec{v} = [x_2, y_2, z_2]$.
Skalarproduktet av vektorene er $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$.

EKSEMPEL 13

Regn ut skalarproduktene av vektorene.

a $\vec{u} = [5, 2]$ og $\vec{v} = [3, -4]$

b $\vec{u} = [0, 2, 3]$ og $\vec{v} = [1, -3, 0]$

a Vi bruker definisjonen, og får

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= [5, 2] \cdot [3, -4] \\ &= 5 \cdot 3 + 2 \cdot (-4) \\ &= 7\end{aligned}$$

b Vi bruker definisjonen, og får

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= [0, 2, 3] \cdot [1, -3, 0] \\ &= 0 \cdot 1 + 2 \cdot (-3) + 3 \cdot 0 \\ &= -6\end{aligned}$$

Til vurdering

12.59
Regn ut skalarproduktet av vektorene.

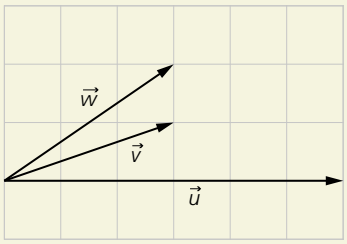
a $\vec{u} = [6, 2]$ og $\vec{v} = [4, 3]$

b $\vec{u} = [-3, 5, 2]$ og $\vec{v} = [5, 3, 0]$

c $\vec{u} = [4, 0, 0]$ og $\vec{v} = [0, 2, 7]$

SNAKK

Forklar ut fra definisjonen at skalarproduktene $\vec{u} \cdot \vec{v}$ og $\vec{u} \cdot \vec{w}$ er like store.



Regneregler for skalarproduktet

La $k \in \mathbb{R}$ og $\vec{u}$, $\vec{v}$ og $\vec{w}$ være vilkårlige vektorer. Da er

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$
$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$
$$\vec{u} \cdot (k\vec{v}) = (k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$$
$$\vec{u}^2 = |\vec{u}|^2$$

Skrivemåten $\vec{u}^2$ betyr $\vec{u} \cdot \vec{u}$.
Med disse regnereglene kan vi forenkle uttrykk slik vi er vant med fra tall- og bokstavregning.

SNAKK

Et bevis for at $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$, er slik:

La $\vec{u} = [x_1, y_1, z_1]$, $\vec{v} = [x_2, y_2, z_2]$ og $\vec{w} = [x_3, y_3, z_3]$. Da er

$$\begin{aligned}
\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) &= [x_1, y_1, z_1] \cdot ([x_2, y_2, z_2] + [x_3, y_3, z_3]) \\
&= [x_1, y_1, z_1] \cdot [x_2 + x_3, y_2 + y_3, z_2 + z_3] \\
&= x_1(x_2 + x_3) + y_1(y_2 + y_3) + z_1(z_2 + z_3) \\
&= x_1x_2 + x_1x_3 + y_1y_2 + y_1y_3 + z_1z_2 + z_1z_3 \\
&= x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 + x_1x_3 + y_1y_3 + z_1z_3 \\
&= [x_1, y_1, z_1] \cdot [x_2, y_2, z_2] + [x_1, y_1, z_1] \cdot [x_3, y_3, z_3] \\
&= \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}
\end{aligned}$$

Forklar tankegangen i beviset.

Til vurdering

EKSEMPEL 14

Regn ut $\vec{u}\cdot 3\vec{v}+\vec{v}\cdot(\vec{v}+2\vec{u})$ når du får vite at $\vec{u}\cdot\vec{v}=6$ og $|\vec{v}|=2\sqrt{5}$.

Vi bruker regnereglene for skalarproduktet, og får

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot 3\vec{v}+\vec{v}\cdot(\vec{v}+2\vec{u}) &= 3\cdot(\vec{u}\cdot\vec{v})+\vec{v}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot 2\vec{u}\\ &= 3\cdot(\vec{u}\cdot\vec{v})+\vec{v}^2+2\cdot(\vec{v}\cdot\vec{u})\\ &= 5\cdot(\vec{u}\cdot\vec{v})+|\vec{v}|^2\\ &= 5\cdot 6+(2\sqrt{5})^2\\ &= 30+20\\ &= 50\end{aligned}$$

12.60

a Hva er $|\vec{u}|$ hvis $\vec{u}^2=49$?

b Hva er $\vec{v}^2$ hvis $|\vec{v}|=2\sqrt{2}$?

12.61

a Bruk regnereglene for skalarproduktet til å vise at $(\vec{u}+\vec{v})^2=\vec{u}^2+2\cdot\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2$.

b Regn ut $(\vec{u}-\vec{v})^2$ og $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})$.

12.62

Du får vite at $\vec{u}\cdot\vec{v}=5$, $|\vec{u}|=\sqrt{17}$ og $|\vec{v}|=\sqrt{13}$. Regn ut

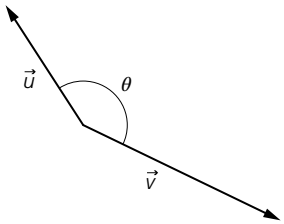
a $2\vec{v}\cdot\vec{u}+\vec{u}\cdot(3\vec{v}+\vec{u})$

b $(\vec{u}-2\vec{v})\cdot(3\vec{v}+\vec{u})$

c $(\vec{v}-\vec{u})^2$

Vinkelen mellom to vektorer

Vinkelen θ mellom to vektorer er den minste vinkelen vi må dreie én av vektorene slik at de får samme retning.

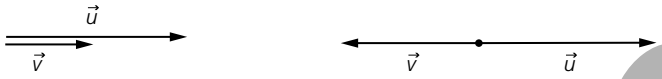


$\theta \in [0°, 180°]$

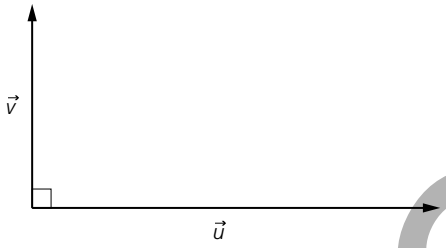
Hvis vi ønsker å framheve navnet på vektorene, kan vi bruke skrivemåten $\theta = \angle(\vec{u}, \vec{v})$.

Tilvurdering

Vinkelen mellom to parallelle vektorer er 0° eller 180°, slik figurene nedenfor viser.

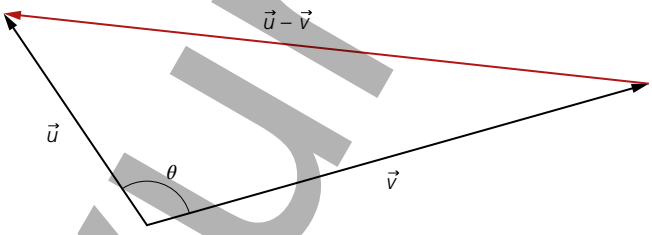


Hvis vinkelen mellom to vektorer er 90°, sier vi at vektorene er *ortogonale*. På figuren nedenfor er vektorene ortogonale, og vi skriver $\vec{u} \perp \vec{v}$.



Geometrisk tolkning av skalarproduktet

Vi starter med å se på differansen mellom to vektorer $\vec{u}$ og $\vec{v}$ som starter i det samme punktet. Som vi har sett tidligere, går $\vec{u}-\vec{v}$ fra slutten av $\vec{v}$ til slutten av $\vec{u}$. På denne måten dannes en trekant.



$a = |\vec{u}-\vec{v}|$
$b = |\vec{u}|$
$c = |\vec{v}|$
$A = \theta$

Vi minner om cosinussetningen, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$.
Tar vi utgangspunkt i vinkelen θ på figuren ovenfor, kan vi altså skrive

$$|\vec{u}-\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2\cdot|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\theta$$

Ifølge regnereglene for skalarproduktet kan vi også skrive

$$\begin{aligned}|\vec{u}-\vec{v}|^2 &= (\vec{u}-\vec{v})^2\\ &= \vec{u}^2 - 2\cdot\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2\\ &= |\vec{u}|^2 - 2\cdot\vec{u}\cdot\vec{v} + |\vec{v}|^2\\ &= |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2\cdot\vec{u}\cdot\vec{v}\end{aligned}$$

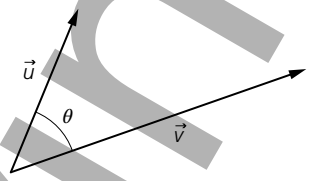
Til vurdering

De to uttrykkene for $|\vec{u}-\vec{v}|^2$ likner på hverandre. For at de skal være like, må $\vec{u}\cdot\vec{v}$ og $|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\theta$ være det samme. Og da har vi utledet den geometriske tolkningen av skalarproduktet.

Skalarproduktet av $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\theta$$

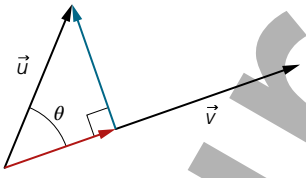
der θ er vinkelen mellom $\vec{u}$ og $\vec{v}$.



UTFORSK

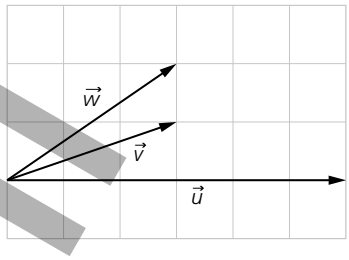
I utledningen ovenfor forutsatte vi egentlig at ingen av vektorene er nullvektoren og at vektorene ikke er parallelle. Vis at sammenhengen $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\theta$ gjelder også i disse spesialtilfellene.

Men hva *er* skalarproduktet? For å svare på det tar vi utgangspunkt i en figur som viser $\vec{u}$ dekomponert i to ortogonale vektorer, den ene parallell med $\vec{v}$ og den andre vinkelrett på $\vec{v}$.



Vi bruker definisjonen av cosinus i rettvinklede trekanter og får at *parallellkomponenten* av $\vec{u}$ er en vektor med lengden $|\vec{u}|\cdot\cos\theta$. Skalarproduktet av to vektorer er altså lengden av den ene vektoren multiplisert med lengden av parallellkomponenten av den andre langs den første.

På figuren nedenfor er parallellkomponentene av $\vec{v}$ og $\vec{w}$ langs $\vec{u}$ like lange. Derfor er skalarproduktene $\vec{u}\cdot\vec{v}$ og $\vec{u}\cdot\vec{w}$ like store.

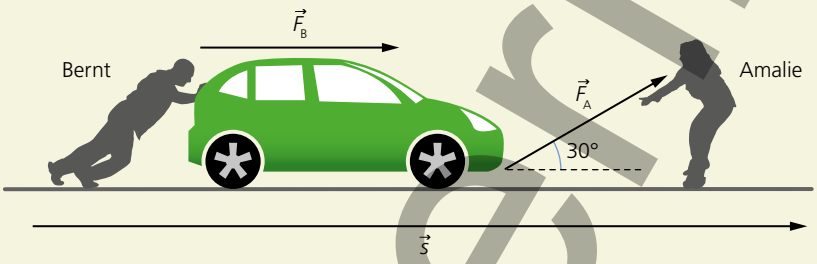


Tilvurdering

SNAKK

Arbeidet W som en kraft $\vec{F}$ utfører når en gjenstand blir flyttet en strekning $\vec{s}$, er definert som skalarproduktet av $\vec{F}$ og $\vec{s}$, dvs. $W = \vec{F} \cdot \vec{s}$. I fysikk er det tradisjon for å skrive F og s i stedet for $|\vec{F}|$ og $|\vec{s}|$. Da får vi $W = F \cdot s \cdot \cos\theta$. Legg merke til at $F\cos\theta$ er lengden av kraftkomponenten langs $\vec{s}$.

Amalie og Bernt har fått motorstopp. De flytter bilen langs en horisontal vei. Bernt dytter med en horisontal kraft, mens Amalie drar i et tau som danner 30° med veien.



Bernt og Amalie dytter og drar like hardt, dvs. $F_A = F_B$.
Likevel gjør Bernt et større arbeid på bilen enn Amalie. Forklar.
Hva kan Amalie gjøre for å få mer ut av kreftene sine?

EKSEMPEL 15

Regn ut skalarproduktet av $\vec{u}$ og $\vec{v}$ når du får vite at $|\vec{u}| = 8$, $|\vec{v}| = 5$ og vinkelen mellom vektorene er

a 0° **b** 60° **c** 90° **d** 120° **e** 180°

a $\vec{u} \cdot \vec{v} = 8 \cdot 5 \cdot \cos 0° = 40 \cdot 1 = 40$

b $\vec{u} \cdot \vec{v} = 8 \cdot 5 \cdot \cos 60° = 40 \cdot \frac{1}{2} = 20$

c $\vec{u} \cdot \vec{v} = 8 \cdot 5 \cdot \cos 90° = 40 \cdot 0 = 0$

d $\vec{u} \cdot \vec{v} = 8 \cdot 5 \cdot \cos 120° = 40 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -20$

e $\vec{u} \cdot \vec{v} = 8 \cdot 5 \cdot \cos 180° = 40 \cdot (-1) = -40$

12.63

Bestem skalarproduket av $\vec{u}$ og $\vec{v}$ når $|\vec{u}| = 2$, $|\vec{v}| = 3$ og vinkelen mellom vektorene er

a 0° **b** 30° **c** 45° **d** 60° **e** 90° **f** 180°

12.64

Vi minner om enhetsvektorene $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ og $\vec{e}_z$.
De har samme retning som koordinataksene og har lengde 1.
Regn ut skalarproduktene på to ulike måter.

a $\vec{e}_x \cdot \vec{e}_y$ **b** $\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x$ **c** $(\vec{e}_x \cdot \vec{e}_y) \cdot \vec{e}_z$ **d** $(\vec{e}_z \cdot \vec{e}_z) \cdot \vec{e}_z$

Tilvurdering

EKSEMPEL 16

Avgjør om vektorene er ortogonale.

a $[-2, 3]$ og $[6, 4]$ **b** $[5, 1, 1]$ og $[-2, 4, 3]$

a Vi regner ut skalarproduktet, og får

$$[-2, 3]\cdot[6, 4] = -2\cdot 6 + 3\cdot 4 = 0$$

Siden skalarproduktet av vektorene er null, er de ortogonale.

b Vi regner ut skalarproduktet, og får

$$[5, 1, 1]\cdot[-2, 4, 3] = 5\cdot(-2) + 1\cdot 4 + 1\cdot 3 = -3$$

Siden skalarproduktet av vektorene ikke er null, er de ikke ortogonale. Vinkelen mellom dem er stump fordi skalarproduktet er negativt.

EKSEMPEL 17

Bestem t slik at vektorene $[3, 2-t, 1]$ og $[t, t-3, -1]$ er ortogonale.

Skalarproduktet av ortogonale vektorer er lik null. Det gir

$$\begin{aligned}
[3, 2-t, 1]\cdot[t, t-3, -1] &= 0\\
3t + (2-t)(t-3) + 1\cdot(-1) &= 0\\
3t + 2t - 6 - t^2 + 3t - 1 &= 0\\
-t^2 + 8t - 7 &= 0\\
t^2 - 8t + 7 &= 0\\
t = 1 \quad &\vee \quad t = 7
\end{aligned}$$

Vektorene er ortogonale når $t = 1$ eller når $t = 7$.

12.65

Avgjør om vektorene er ortogonale.

a $[4, 1]$ og $[-4, 16]$

b $[-2, 5, 1]$ og $[14, 6, -2]$

c $[2, 0, 1]$ og $[4, 6, 0]$

12.66

Bestem k slik at vektorene er ortogonale.

a $[2, 5]$ og $[k, 2]$

b $[2k, 4, 1]$ og $[k, -2, 0]$

c $[k^2, 1-k, -7]$ og $[2k, k+7, 1]$

Tilvurdering

12.67
Vi har punktene $A(4\,,\,2)$ og $B(-2\,,\,5)$. Videre ligger et punkt C på linja $x = 5$. Finn koordinatene til C slik at $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{AB}$.

UTFORSK

a Finn minst tre vektorer som er ortogonale med $[2\,,6]$.

b Vis at $[x\,,\,y] \perp [-y\,,\,x]$ og at $[x\,,\,y] \perp \left[1, -\dfrac{x}{y}\right]$.

Formuler ut fra dette to ulike algoritmer for å finne en ortogonal vektor til en gitt todimensjonal vektor.

c Finn en algoritme for å finne en ortogonal vektor til en gitt tredimensjonal vektor.

EKSEMPEL 18

Finn vinkelen mellom vektorene $[-2\,,3\,,4]$ og $[5\,,3\,,-7]$.

Vi bruker skalarproduktet, og får

$$[-2\,,3\,,4]\cdot[5\,,3\,,-7] = \left|[-2\,,3\,,4]\right|\cdot\left|[5\,,3\,,-7]\right|\cdot\cos\theta$$

$$-2\cdot5+3\cdot3+4\cdot(-7) = \sqrt{(-2)^2+3^2+4^2}\cdot\sqrt{5^2+3^2+(-7)^2}\cdot\cos\theta$$

$$-29 = \sqrt{29}\cdot\sqrt{83}\cdot\cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{-29}{\sqrt{29}\cdot\sqrt{83}}$$

$$\theta = 126{,}2°$$

Bruker $\cos^{-1}$ for å finne vinkelen.

Vinkelen mellom vektorene er 126,2°.

12.68
Finn vinkelen mellom vektorene.

a $[4\,,1]$ og $[-4\,,1]$

b $[-2\,,5\,,3]$ og $[14\,,6\,,2]$

c $[-2\,,5\,,-10]$ og $[5\,,4\,,1]$

12.69
Punktene $A(-3\,,\,2\,,\,1)$, $B(3\,,\,-6\,,\,2)$ og $C(1\,,\,1\,,\,1)$ danner trekanten ABC. Bruk skalarproduktet til å finne vinklene i $\triangle ABC$.

Tilvurdering

RØDE OPPGAVER

12.70

Lengden av $\vec{u}$ er 4, og lengden av $\vec{v}$ er 9.

a Finn skalarproduktet av de to vektorene når vinkelen mellom dem er 60°.

b Hva må vinkelen mellom dem være for at skalarproduktet av dem skal bli størst mulig?

c Hva må vinkelen mellom dem være for at skalarproduktet av dem skal bli 0?

12.71

Bestem t slik at vektorene $\vec{u}$ og $\vec{v}$ blir ortogonale.

a $\vec{u} = [2, t]$ og $\vec{v} = [3, 8]$ **b** $\vec{u} = [t-1, t, 0]$ og $\vec{v} = [4, -1, 3]$

12.72 (Eksamen Forkurset 2013)

Gitt to vektorer i rommet: $\overrightarrow{OB} = [1, 2, 2]$ og $\overrightarrow{BC} = [0, 1, -2]$.

OBC danner en trekant. Benytt vektorregning til å vise at vinkel $B = 72{,}7°$.

BLÅ OPPGAVER

12.73

Vi lar timeviseren og minuttviseren på en klokke være $\vec{u}$ og $\vec{v}$, med lengder 2 og 3.

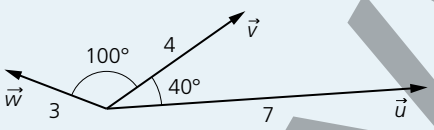
a Hva er $\vec{u} \cdot \vec{v}$ når klokka viser 9.30?

b Finn et tidspunkt der $\vec{u} \perp \vec{v}$.

c Finn et tidspunkt der $\vec{u} \cdot \vec{v} = -6$.

12.74

Bestem $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w})$ når lengder og vinkler er slik figuren viser.



12.75

a Forklar hva $\vec{u} = [1, a]$ forteller om linja $y = ax + b$.

To linjer er gitt ved likningene $y = a_1x + b_1$ og $y = a_2x + b_2$.

b Vis at $a_1 \cdot a_2 = -1$ hvis linjene står normalt på hverandre.

c Bruk resultatet ovenfor til å avgjøre om linjene $y = 5x + 2$ og $y = -\frac{1}{5} - 2x$ står normalt på hverandre.

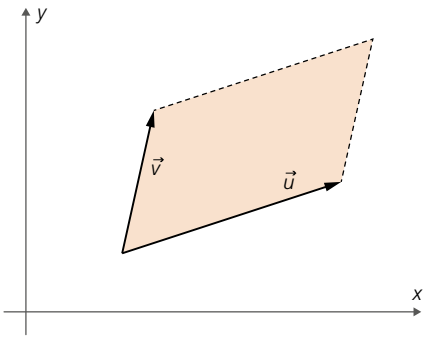
12.76

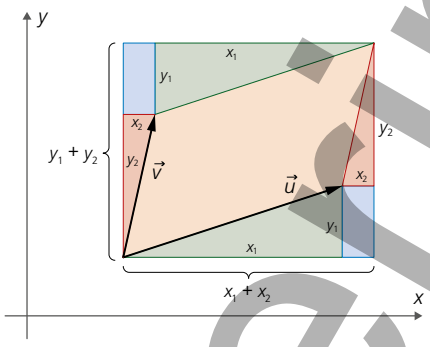
Vektorene $\vec{u}$ og $\vec{v}$ har lengdene 2 og 3.

Bestem vinkelen mellom vektorene slik at vektorene $\vec{u} + \vec{v}$ og $2\vec{u} - \vec{v}$ står vinkelrett på hverandre.

Til vurdering

12F Determinanter





Vi vil finne et uttrykk for arealet av parallellogrammet utspent av to vilkårlige todimensjonale vektorer $\vec{u} = [x_1, y_1]$ og $\vec{v} = [x_2, y_2]$.

På figuren til høyre har vi omskrevet parallellogrammet med et rektangel som har arealet

$$(x_1 + x_2) \cdot (y_1 + y_2) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$$

I tillegg til parallellogrammet inneholder dette rektanglet

- to like rektangler, med samlet areal $2x_2y_1$
- to like trekanter, med samlet areal $2 \cdot \frac{1}{2} x_1y_1 = x_1y_1$
- to like trekanter, med samlet areal $2 \cdot \frac{1}{2} x_2y_2 = x_2y_2$

Vi kan finne et uttrykk for arealet av parallellogrammet ved å trekke arealene av disse figurene fra arealet av det omskrevne rektanglet. Da får vi

$$x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2 - 2x_2y_1 - x_1y_1 - x_2y_2 = x_1y_2 - x_2y_1$$

Denne strukturen oppstår ofte i matematikk, og har derfor fått en egen skrivemåte og et eget navn. Vi kaller det en *determinant*, og skriver

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1y_2 - y_1x_2$$

Legg merke til at det er koordinatene til $\vec{u} = [x_1, y_1]$ og $\vec{v} = [x_2, y_2]$ som utgjør radene i determinanten. Derfor sier vi at dette er determinanten til vektorene $\vec{u}$ og $\vec{v}$, og vi skriver

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1y_2 - y_1x_2$$

Siden determinanten til to vektorer kan bli negativ, er det absoluttverdien av den som er arealet av parallellogrammet vektorene utspenner.

Til vurdering

Arealet av parallellogrammet utspent av vektorene $\vec{u} = [x_1 , y_1]$ og $\vec{v} = [x_2 , y_2]$ er

$$|\det(\vec{u} , \vec{v})| = \left\| \begin{matrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{matrix} \right\| = |x_1y_2 - y_1x_2|$$

EKSEMPEL 19

a Finn arealet av parallellogrammet med hjørner i $A(-2 , 1)$, $B(4 , 2)$, $C(6 , 5)$ og $D(0 , 4)$.

b Finn arealet av trekanten med hjørner i $A(8 , -1)$, $B(13 , 4)$ og $C(17 , 2)$.

a Parallellogrammet er utspent av $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AD}$.

$$\overrightarrow{AB} = [4-(-2) , 2-1] = [6 , 1]$$
$$\overrightarrow{AD} = [0-(-2) , 4-1] = [2 , 3]$$

Arealet er derfor

$$\left|\det\left(\overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AD}\right)\right| = \left\| \begin{matrix} 6 & 1 \\ 2 & 3 \end{matrix} \right\| = |6\cdot 3 - 1\cdot 2| = |16| = 16$$

b Trekanten er utspent av $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AB} = [13-8 , 4-(-1)] = [5 , 5]$$
$$\overrightarrow{AC} = [17-8 , 2-(-1)] = [9 , 3]$$

Trekanten har halvparten så stort areal som parallellogrammet utspent av de samme vektorene. Arealet er derfor

$$\frac{1}{2}\cdot\left|\det\left(\overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC}\right)\right| = \frac{1}{2}\cdot\left\| \begin{matrix} 5 & 5 \\ 9 & 3 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{2}\cdot|5\cdot 3 - 5\cdot 9| = \frac{1}{2}\cdot|-30| = \frac{1}{2}\cdot 30 = 15$$

12.77

Finn arealet av parallellogrammet utspent av vektorene $\vec{u}$ og $\vec{v}$.

a $\vec{u} = [7 , 3]$ og $\vec{v} = [2 , 5]$ **b** $\vec{u} = [1, 2]$ og $\vec{v} = [3 , 4]$

12.78

Finn arealet av trekanten utspent av vektorene $[6 , 1]$ og $[-2 , 8]$.

12.79

Punktene $A(1 , 1)$, $B(5 , 2)$, $C(4 , 4)$ og $D(0 , 3)$ er gitt.

a Finn arealet av parallellogrammet $ABCD$.

b Finn arealet av trekanten ABC.

c Hvorfor ble ikke svaret i oppgave b halvparten av svaret i oppgave a?

Til vurdering

3 x 3-determinanter

Determinantene vi har sett på så langt, har hatt to rader og to kolonner. Vi kaller dem 2×2-determinanter. I forbindelse med tredimensjonale vektorer, vil vi få bruk for determinanter med tre rader og tre kolonner. Slike determinanter kaller vi 3×3-determinanter.

Determinanten til vektorene $\vec{u}=[x_1, y_1, z_1]$, $\vec{v}=[x_2, y_2, z_2]$ og $\vec{w}=[x_3, y_3, z_3]$ er

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = x_1 \cdot \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} - y_1 \cdot \begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} + z_1 \cdot \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

For å regne ut en 3×3-determinant må vi altså regne ut produktet av tallene på den første raden med hver sin 2×2-determinant:

- Det første tallet i rad 1 ganges med determinanten vi får ved å fjerne første rad og første kolonne.
- Det andre tallet i rad 1 ganges med determinanten vi får ved å fjerne første rad og andre kolonne. Dette leddet inngår dessuten med negativt fortegn.
- Det tredje tallet i rad 1 ganges med determinanten vi får ved å fjerne første rad og tredje kolonne.

EKSEMPEL 20

Regn ut determinanten til vektorene $\vec{u}=[1, 2, 3]$, $\vec{v}=[-4, 1, 0]$ og $\vec{w}=[2, 1, 6]$.

Vi bruker definisjonen av en 3×3-determinant, og får

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1\cdot(1\cdot6 - 0\cdot1) - 2\cdot\big((-4)\cdot6 - 0\cdot2\big) + 3\cdot\big((-4)\cdot1 - 1\cdot2\big)$$

$$= 6 + 48 - 18$$

$$= 36$$

12.80

Regn ut determinanten til vektorene $\vec{u}$, $\vec{v}$ og $\vec{w}$.

a $\vec{u}=[1, 0, 3]$, $\vec{v}=[4, 1, 2]$ og $\vec{w}=[2, 1, 3]$

b $\vec{u}=[-1, 3, 0]$, $\vec{v}=[-1, 1, 2]$ og $\vec{w}=[5, 3, 6]$

c $\vec{u}=[1, 2, 3]$, $\vec{v}=[1, 0, 0]$ og $\vec{w}=[0, 1, 0]$

d $\vec{u}=[i, j, k]$, $\vec{v}=[-2, 3, 0]$ og $\vec{w}=[5, 1, -4]$

Til vurdering

12G Vektorproduktet

Vektorproduktet av to tredimensjonale vektorer har ikke noe motstykke i planet.
Vektorproduktet av $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er også en vektor. Vi skriver $\vec{u} \times \vec{v}$, med et tydelig kryss, og derfor kaller vi det også *kryssproduktet*. Definisjonen av vektorproduktet skal vise seg å gi det egenskaper som er relevante innen geometri og fysikk.

Vektorproduktet av $\vec{u} = [x_1, y_1, z_1]$ og $\vec{v} = [x_2, y_2, z_2]$ er

$$\vec{u} \times \vec{v} = [y_1 \cdot z_2 - z_1 \cdot y_2, -(x_1 \cdot z_2 - z_1 \cdot x_2), x_1 \cdot y_2 - y_1 \cdot x_2]$$

I definisjonen gjenkjenner vi koordinatene til vektorproduktet som 2×2-determinanter. Vi kan derfor skrive

$$\vec{u} \times \vec{v} = \left[\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right]$$

Vi kan uttrykke vektorproduktet ved hjelp av enhetsvektorer. Det gir

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_x - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_y + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_z$$

Dette gjenkjenner vi som en 3×3-determinant med enhetsvektorene i første rad og koordinatene til $\vec{u}$ og $\vec{v}$ på de to neste radene. Vi kan altså skrive

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

Til vurdering

EKSEMPEL 21

Regn ut vektorproduktet av vektorene [2 , 4 , 6] og [1 , 3 , 5].

Av definisjonen på determinant-form får vi

$$[2,4,6]\times[1,3,5]=\begin{vmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z\\ 2 & 4 & 6\\ 1 & 3 & 5\end{vmatrix}$$

$$=\left[\begin{vmatrix}4 & 6\\ 3 & 5\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}2 & 6\\ 1 & 5\end{vmatrix},\begin{vmatrix}2 & 4\\ 1 & 3\end{vmatrix}\right]$$

$$=[4\cdot5-6\cdot3,-(2\cdot5-6\cdot1),2\cdot3-4\cdot1]$$

$$=[2,-4,2]$$

Med Python:

```
from pylab import *

u = array([2,4,6])
v = array([1,3,5])

vektorproduktet = cross(u,v)

print("Vektorproduktet er", vektorproduktet)
```

Utskrift:

Vektorproduktet er [2 -4 2]

12.81

Regn ut vektorproduktene.

a $[2,1,0]\times[1,4,1]$ **b** $[0,1,-2]\times[3,-1,1]$ **c** $[3,-1,-2]\times[2,-4,1]$

12.82

Ta for deg vektorene $\vec{u}=[1,2,4]$ og $\vec{v}=[3,5,6]$.

a Regn ut $\vec{u}\times\vec{v}$.

b Regn ut $\vec{v}\times\vec{u}$.

c Hvilken sammenheng er det mellom svarene i oppgave a og oppgave b?

Vektorproduktet er ikke kommutativt.
For to vilkårlige vektorer $\vec{u}$ og $\vec{v}$ i rommet er

$$\vec{u}\times\vec{v}=-(\vec{v}\times\vec{u})$$

Tilvurdering

12.83

a Regn ut vektorproduktene. Kommenter.

1 $[1, 8, 2] \times [1, 8, 2]$ **2** $[-2, 3, 0] \times [-2, 3, 0]$

b La $\vec{u} = [x, y, z]$ være en vilkårlig vektor i rommet. Vis at $\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$.

For en vilkårlig vektor $\vec{u}$ i rommet er

$$\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$$

12.84

Ta for deg vektorene $\vec{u} = [1, 2, 4]$, $\vec{v} = [3, 5, 6]$ og $\vec{w} = [-3, 1, 4]$.

a Regn ut $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w})$.

b Regn ut $\vec{u} \times \vec{v} + u \times \vec{w}$.

c Hvilken sammenheng er det mellom svarene i oppgave a og oppgave b?

Vektorproduktet er distributivt med hensyn til addisjon.
For tre vilkårlige vektorer $\vec{u}$, $\vec{v}$ og $\vec{w}$ i rommet er

$$\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + u \times \vec{w}$$

12.85

La $k \in \mathbb{R}$ og la $\vec{u} = [x_1, y_1, z_1]$ og $\vec{v} = [x_2, y_2, z_2]$ være to vilkårlige vektorer i rommet.

Regn ut $(k\vec{u}) \times \vec{v}$, $\vec{u} \times (k\vec{v})$ og $k(\vec{u} \times \vec{v})$.

Forklar med egne ord innholdet i regneregelen du nå har bevist.

La $k \in \mathbb{R}$. For to vilkårlige vektorer $\vec{u}$ og $\vec{v}$ i rommet er

$$(k\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (k\vec{v}) = k(\vec{u} \times \vec{v})$$

SNAKK

De tredimensjonale vektorene $\vec{a}$, $\vec{b}$ og $\vec{c}$ (ingen av dem er nullvektoren) er gitt.

Hva kan du si om

a det $(\vec{a}, \vec{c}, \vec{c})$

b sammenhengen mellom det $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ og det $(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b})$

c sammenhengen mellom det $(\vec{a}, k\vec{b}, \vec{c})$ og det $(\vec{a}, \vec{b}, k\vec{c})$

Tilvurdering

EKSEMPEL 22

Regn ut $\vec{u}\times(5\vec{v})+\vec{v}\times(\vec{v}+2\vec{u})$ når du får vite at $\vec{u}\times\vec{v}=[2\,,3\,,-4]$.

$$\begin{aligned}\vec{u}\times(5\vec{v})+\vec{v}\times(\vec{v}+2\vec{u}) &= 5(\vec{u}\times\vec{v})+\vec{v}\times\vec{v}+\vec{v}\times(2\vec{u})\\ &= 5(\vec{u}\times\vec{v})+\vec{0}+2(\vec{v}\times\vec{u})\\ &= 5(\vec{u}\times\vec{v})-2(\vec{u}\times\vec{v})\\ &= 3(\vec{u}\times\vec{v})\\ &= 3[2\,,3\,,-4]\\ &= [6\,,9\,,-12]\end{aligned}$$

12.86

Du får vite at $\vec{u}\times\vec{v}=[-2\,,0\,,3]$. Bestem

a $\vec{v}\times\vec{u}$ **b** $4(\vec{u}\times\vec{v})$ **c** $\vec{u}\times(2\vec{v})$

12.87

Du får vite at $\vec{u}\times\vec{v}=[-2\,,1\,,4]$. Regn ut

a $(3\vec{u})\times\vec{v}+\vec{u}\times(4\vec{v})$ **b** $2(\vec{u}\times\vec{v})+3(\vec{v}\times\vec{u})$ **c** $\vec{v}\times\vec{u}+\vec{u}\times(\vec{v}-4\vec{u})$

12.88

a Regn ut.

1 $[1\,,8\,,2]\times[2\,,16\,,4]$ **2** $[-2\,,3\,,1]\times[6\,,-9\,,-3]$

b La $\vec{u}$ være en vilkårlig vektor i rommet. Vis at $\vec{u}\times(k\vec{u})=\vec{0}$ for alle $k\in\mathbb{R}$.

c Bestem m slik at $[3\,,2\,,1]\times[9\,,m\,,3]=\vec{0}$.

To vektorer i rommet er parallelle hvis og bare hvis vektorproduktet av dem er $\vec{0}$.

$$\vec{u}\parallel\vec{v} \quad\Leftrightarrow\quad \vec{u}\times\vec{v}=\vec{0}$$

12.89

Ta for deg vektorene $\vec{u}=[1\,,2\,,4]$ og $\vec{v}=[3\,,5\,,6]$.

a Regn ut $\vec{u}\cdot(\vec{u}\times\vec{v})$.

b Regn ut $\vec{v}\cdot(\vec{u}\times\vec{v})$.

c Forklar hva svarene i oppgave a og oppgave b forteller oss.

d Tegn $\vec{u}$, $\vec{v}$ og $\vec{u}\times\vec{v}$ i Grafikkfelt 3D i GeoGebra.
Kan du finne en synsvinkel som bekrefter resultatet fra oppgave c?

e Danner $\vec{u}$, $\vec{v}$ og $\vec{u}\times\vec{v}$ et høyrehåndssystem eller et venstrehåndssystem?

12.90

Ta for deg enhetsvektorene $\vec{e}_x=[1\,,0\,,0]$ og $\vec{e}_y=[0\,,1\,,0]$.

a Regn ut $\vec{e}_x\times\vec{e}_y$.

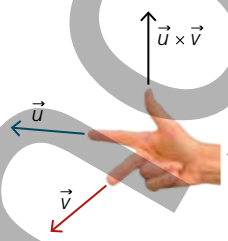
b Danner $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ og $\vec{e}_x\times\vec{e}_y$ et høyrehåndssystem eller et venstrehåndssystem?

Tilvurdering

For to vilkårlige vektorer $\vec{u}$ og $\vec{v}$ i rommet er vektorproduktet $\vec{u}\times\vec{v}$ en vektor som er ortogonal med både $\vec{u}$ og $\vec{v}$.

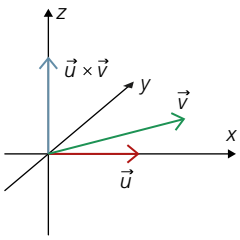
$$\vec{u}\perp\vec{u}\times\vec{v}$$
$$\vec{v}\perp\vec{u}\times\vec{v}$$

Vektorene $\vec{u}$, $\vec{v}$ og $\vec{u}\times\vec{v}$ (i denne rekkefølgen) danner et høyrehåndssystem.

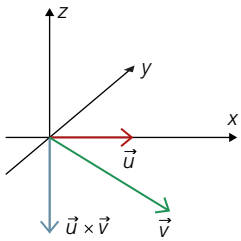


Vi vil bevise at $\vec{u}$, $\vec{v}$ og $\vec{u}\times\vec{v}$ danner et høyrehåndssystem. Vi ser først på tilfellet der $\vec{u}$ og $\vec{v}$ ligger i xy-planet og $\vec{u}$ peker langs den positive x-aksen.
Da er $\vec{u}=[x_1, 0, 0]$ der $x_1>0$, og $\vec{v}=[x_2, y_2, 0]$.
Ifølge definisjonen er vektorproduktet $\vec{u}\times\vec{v}=[0, 0, x_1y_2]$.
Vektorproduktet $\vec{u}\times\vec{v}$ står vinkelrett på både $\vec{u}$ og $\vec{v}$, og den er derfor parallell med enhetsvektoren $\vec{e}_z$. Siden $x_1>0$, er det fortegnet til y_2 som avgjør om vektorproduktet peker langs den positive eller negative z-aksen:

- Hvis $y_2>0$, ligger $\vec{v}$ i første eller andre kvadrant og $\vec{u}\times\vec{v}$ peker langs den positive z-aksen.



- Hvis $y_2<0$, ligger $\vec{v}$ i tredje eller fjerde kvadrant og $\vec{u}\times\vec{v}$ peker langs den negative z-aksen.



Bruk høyrehånda til å bekrefte at høyrehåndsregelen gir riktig retning på $\vec{u}\times\vec{v}$ i de to tilfellene, vist på figurene til høyre.

For det generelle tilfellet at $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er vilkårlige vektorer i rommet, kan vi tenke oss at vi lager en kopi av koordinatsystemet og roterer det slik at $\vec{u}$ og $\vec{v}$ ligger i xy-planet og $\vec{u}$ peker langs den positive x-aksen. Da kan vi ut fra det vi viste ovenfor si at $\vec{u}$, $\vec{v}$ og $\vec{u}\times\vec{v}$ danner et høyrehåndssystem.

Merk!
Dette er en bevisteknikk som er verdt å merke seg: Vi viser resultatet for et spesielt tilfelle, og argumenterer for at det generelle tilfellet kan føres tilbake til spesialtilfellet.

Tilvurdering

EKSEMPEL 23

En vektor har lengde 3 og er ortogonal med både [2 , 4 , –4] og [–1, 0 , 1]. Hvilken vektor kan dette være?

Vi finner vektorproduktet av [2 , 4 , –4] og [–1, 0 , 1].

$$[2\,,4\,,-4]\times[-1,0\,,1] = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 2 & 4 & -4 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \left[\begin{vmatrix} 4 & -4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}\right]$$

$$= [4\cdot 1-(-4)\cdot 0\,, -\big(2\cdot 1-(-4)\cdot(-1)\big)\,, 2\cdot 0-4\cdot(-1)]$$

$$= [4\,,2\,,4]$$

Vektoren [4 , 2 , 4] står vinkelrett på begge vektorene, men lengden er

$$\big|[4\,,2\,,4]\big| = \sqrt{4^2+2^2+4^2} = \sqrt{36} = 6$$

Vi har altså funnet en vektor som er dobbelt så lang som den vi er ute etter. Vi vil derfor faktorisere ut en skalar med absoluttverdi 2. Det kan vi gjøre på to måter:

$$[4\,,2\,,4] = 2\cdot[2\,,1,2]$$
$$[4\,,2\,,4] = -2\cdot[-2\,,-1,-2]$$

Det er to vektorer som oppfyller kravene: [2 , 1, 2] og [–2 , –1, –2].

12.91

a Finn en vektor som er ortogonal med både [3 , 4 , –1] og [–1, 2 , 1].

b Finn to like lange vektorer som er ortogonale med både [–3 , 1 , 1] og [1, 2 , 3].

c En vektor har lengde $\sqrt{5}$ og er ortogonal med både [6 , 1, 2] og [3 , 1, 2]. Hvilken vektor kan dette være?

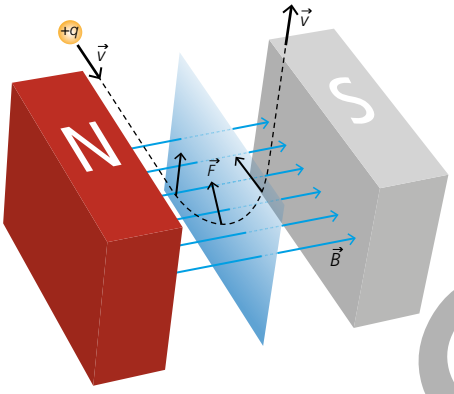
d En vektor $\vec{w}$ har lengde 3 og er ortogonal med både $\vec{u} = [2\,,4\,,-4]$ og $\vec{v} = [-1,0\,,1]$. Bestem vektoren $\vec{u}$ når du får vite at $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ er et høyrehåndssystem.

Tilvurdering

12.92

Den magnetiske kraften $\vec{F}$ på en elektrisk ladd partikkel i et magnetfelt er proporsjonal med vektorproduktet av farten $\vec{v}$ og den magnetiske feltstyrken $\vec{B}$. Proporsjonalitetskonstanten er ladningen q som partikkelen har.

a Formuler dette matematisk.



b Forklar at retningen på kraften på den positivt ladde partikkelen på figuren er i samsvar med formelen i oppgave a.
Lag en skisse som viser banen en negativt ladd partikkel vil ha i det samme magnetfeltet.

Enheten er newton for kraften, m/s for farten, tesla for feltstyrken og coulomb for ladningen, men her skal du regne uten enheter.

Et proton med farten [2 , – 4 , 1] kommer inn i et område der den magnetiske feltstyrken er [1, 2 , –3]. Protonet har ladningen $1{,}6 \cdot 10^{-19}$.

c Bestem den magnetiske kraften som virker på protonet når det kommer inn i magnetfeltet.

Tilrettelagt undervisning

Lagranges identitet

På veien fram mot den geometriske betydningen av vektorproduktet skal vi ta for oss en identitet utledet av den franske matematikeren Lagrange på 1700-tallet.

La $\vec{u} = [x_1, y_1, z_1]$ og $\vec{v} = [x_2, y_2, z_2]$ være to vilkårlige vektorer i rommet. Først ser vi på kvadratet av absoluttverdien av vektorproduktet av de to vektorene:

$$\begin{aligned}
|\vec{u} \times \vec{v}|^2 &= (y_1z_2 - z_1y_2)^2 + (z_1x_2 - x_1z_2)^2 + (x_1y_2 - y_1x_2)^2 \\
&= y_1^2z_2^2 - 2y_1z_2z_1y_2 + z_1^2y_2^2 + z_1^2x_2^2 - 2z_1x_2x_1z_2 + x_1^2z_2^2 + x_1^2y_2^2 - 2x_1y_2y_1x_2 + y_1^2x_2^2 \\
&= y_1^2z_2^2 - 2y_1y_2z_1z_2 + z_1^2y_2^2 + z_1^2x_2^2 - 2x_1x_2z_1z_2 + x_1^2z_2^2 + x_1^2y_2^2 - 2x_1x_2y_1y_2 + y_1^2x_2^2 \\
&= y_1^2z_2^2 + z_1^2y_2^2 + z_1^2x_2^2 + x_1^2z_2^2 + x_1^2y_2^2 + y_1^2x_2^2 - 2x_1x_2y_1y_2 - 2x_1x_2z_1z_2 - 2y_1y_2z_1z_2
\end{aligned}$$

Så ser vi på kvadratet av skalarproduktet av vektorene:

$$\begin{aligned}
(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 &= (x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2)^2 \\
&= x_1^2x_2^2 + x_1x_2y_1y_2 + x_1x_2z_1z_2 + y_1y_2x_1x_2 + y_1^2y_2^2 + y_1y_2z_1z_2 + z_1z_2x_1x_2 + z_1z_2y_1y_2 + z_1^2z_2^2 \\
&= x_1^2x_2^2 + y_1^2y_2^2 + z_1^2z_2^2 + 2x_1x_2y_1y_2 + 2x_1x_2z_1z_2 + 2y_1y_2z_1z_2
\end{aligned}$$

Hvis vi legger sammen disse uttrykkene, vil de tre siste leddene oppheve hverandre. Vi får

$$\begin{aligned}
|\vec{u} \times \vec{v}|^2 + (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 &= y_1^2z_2^2 + z_1^2y_2^2 + z_1^2x_2^2 + x_1^2z_2^2 + x_1^2y_2^2 + y_1^2x_2^2 + x_1^2x_2^2 + y_1^2y_2^2 + z_1^2z_2^2 \\
&= x_1^2(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) + y_1^2(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) + z_1^2(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) \\
&= (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) \cdot (x_2^2 + y_2^2 + z_2^2)
\end{aligned}$$

Vi gjenkjenner kvadratene av absoluttverdien av $\vec{u}$ og $\vec{v}$, og får *Lagranges identitet*:

$$|\vec{u} \times \vec{v}|^2 + (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 = |\vec{u}|^2 \cdot |\vec{v}|^2$$

eller, omskrevet:

$$|\vec{u} \times \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 \cdot |\vec{v}|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2$$

Til vurdering

Vi vet at $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\theta$, der θ er vinkelen mellom vektorene.
Innsatt i Lagranges identitet får vi

$$\begin{aligned}|\vec{u}\times\vec{v}|^2 &= |\vec{u}|^2\cdot|\vec{v}|^2-\left(|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\theta\right)^2\\ &= |\vec{u}|^2\cdot|\vec{v}|^2-|\vec{u}|^2\cdot|\vec{v}|^2\cdot\cos^2\theta\\ &= |\vec{u}|^2\cdot|\vec{v}|^2\cdot\left(1-\cos^2\theta\right)\\ &= |\vec{u}|^2\cdot|\vec{v}|^2\cdot\sin^2\theta\\ &= \left(|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\sin\theta\right)^2\end{aligned}$$

Enhetsformelen

Siden $\theta\in[0°, 180°]$, er $\sin\theta\geq 0$. Derfor får vi at

$$|\vec{u}\times\vec{v}|=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\sin\theta$$

La θ være vinkelen mellom to vilkårlige vektorer $\vec{u}$ og $\vec{v}$ i rommet. Da er

$$|\vec{u}\times\vec{v}|=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\sin\theta$$

12.93
Vis at sammenhengen $|\vec{u}\times\vec{v}|=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\sin\theta$ stemmer for vektorene $\vec{u}=[1, 2, 4]$ og $\vec{v}=[3, 5, 6]$.

12.94
To vektorer i rommet har lengde 4, og vinkelen mellom dem er 30°.
Hva er lengden av vektorproduktet av de to vektorene?

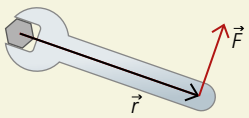
12.95
To vektorer i rommet har lengder $\sqrt{3}$ og 2, og lengden av vektorproduktet av de to vektorene er 3. Hva er vinkelen mellom vektorene?

12.96
Finn vinkelen mellom vektorene $\vec{u}$ og $\vec{v}$ når ingen av dem er nullvektoren og du får vite at

a $|\vec{u}\times\vec{v}|=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|$ **b** $|\vec{u}\times\vec{v}|=0$

SNAKK

Du har kanskje hørt uttrykket «kraft ganger arm»?
Det sikter til at når vi for eksempel vil løsne en skrue som sitter godt fast, er det en fordel å ta tak langt ute, og vinkelrett, på skaftet til skiftenøkkelen.
Forklar dette når du får vite definisjonen av *dreiemomentet* $\vec{\tau}$:



$$\vec{\tau}=\vec{r}\times\vec{F}$$

Tilvurdering

RØDE OPPGAVER

12.97

Ta for deg vektorene $\vec{u} = [1, 0, 2]$ og $\vec{v} = [-2, 0, -1]$.

a Regn ut $\vec{u} \cdot \vec{v}$ og $|\vec{u} \times \vec{v}|$.

La θ være vinkelen mellom $\vec{u}$ og $\vec{v}$.

b Finn den eksakte verdien av $\cos\theta$ og $\sin\theta$.

c Bestem θ.

12.98

Vi minner om enhetsvektorene $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ og $\vec{e}_z$.

De har samme retning som koordinataksene og har lengde 1.

Regn ut vektorproduktene.

a $\vec{e}_x \times \vec{e}_y$ **b** $\vec{e}_y \times \vec{e}_z$ **c** $\vec{e}_z \times \vec{e}_y$ **d** $\vec{e}_x \times \vec{e}_x$

12.99

Skriv så enkelt som mulig.

a $\vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{u}$ **b** $\vec{u} \times \vec{v} - \vec{v} \times \vec{u}$ **c** $3\vec{u} \times (2\vec{v} - 4\vec{u})$

d $(\vec{u} + \vec{v}) \times (\vec{u} + \vec{v})$ **e** $(\vec{u} + \vec{v}) \times (\vec{u} - \vec{v})$ **f** $(\vec{u} - \vec{v}) \times (\vec{u} - \vec{v})$

12.100

Per og Kari har regnet ut hvert sitt vektorprodukt.

Per: $[2, 3, 1] \times [1, 1, -2] = [-7, 5, 1]$

Kari: $[4, 1, 0] \times [3, 2, 0] = [0, 0, -5]$

a Bruk skalarproduktet til å vise at Per må ha regnet feil.

b Bruk høyrehåndsregelen for vektorproduktet til å begrunne at Kari også har regnet feil.

c Hvorfor avslører ikke skalarproduktet feilen Kari gjør?

BLÅ OPPGAVER

12.101

La $\vec{u} = [x_1, y_1, z_1]$, $\vec{v} = [x_2, y_2, z_2]$ og $\vec{w} = [x_3, y_3, z_3]$ være tre vilkårlige vektorer i rommet.

a Vis at $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$.

b Vis at $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w}) \cdot \vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{w}$.

c Vis at $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = \vec{0}$ hvis de tre vektorene er ortogonale.

12.102

For de tre vektorene $\vec{a}$, $\vec{b}$ og $\vec{c}$ får vi oppgitt at $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$. Vis at $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a}$.

12.103

Vektorene $\vec{p}$ og $\vec{q}$ er gitt ved $\vec{p} = [2, a, b]$ og $\vec{q} = [3, c, d]$. Videre er $\vec{p} \times \vec{q} = [0, 0, 8]$ og $\vec{p} \cdot \vec{q} = 4$.

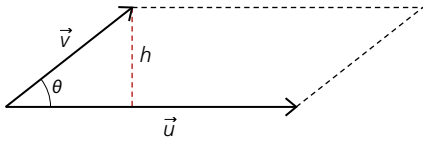
Forklar at $b = d = 0$. Bestem deretter a og c.

Tilvurdering

12H Areal og volum

Vektorproduktet og areal

La de tredimensjonale vektorene $\vec{u}$ og $\vec{v}$ ha det samme startpunktet. Hvis vektorene ikke er parallelle, utspenner de et parallellogram i rommet.

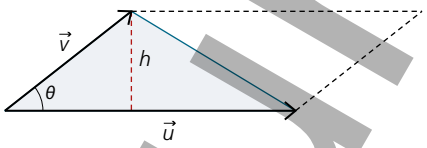


Arealet av et parallellogram er grunnlinja multiplisert med høyden. Her er grunnlinja $|\vec{u}|$ og høyden $h = |\vec{v}| \cdot \sin\theta$. Arealet er derfor

$$|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin\theta$$

Dette gjenkjenner vi som lengden av vektorproduktet av $\vec{u}$ og $\vec{v}$.

Så ser vi på trekanten utspent av $\vec{u}$ og $\vec{v}$.



Arealet av denne trekanten er halvparten så stort som arealet av parallellogrammet utspent av de samme vektorene.

To vilkårlige vektorer $\vec{u}$ og $\vec{v}$ i rommet utspenner et parallellogram med arealet

$$|\vec{u} \times \vec{v}|$$

og en trekant med arealet

$$\frac{1}{2} \cdot |\vec{u} \times \vec{v}|$$

SNAKK Forklar at arealformlene ovenfor forutsetter at $\vec{u}$ og $\vec{v}$ ikke er parallelle.

Tilvurdering

EKSEMPEL 24

Punktene $A(1, 3, 2)$, $B(2, 1, 4)$ og $C(3, 2, 0)$ danner en trekant ABC.
Finn arealet av $\triangle ABC$.

Vi velger å ta utgangspunkt i hjørnet A. Da kan vi si at trekanten er utspent av vektorene $\overrightarrow{AB} = [1, -2, 2]$ og $\overrightarrow{AC} = [2, -1, -2]$.
Vi beregner derfor $\frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left|[1, -2, 2] \times [2, -1, -2]\right| &= \frac{1}{2} \cdot \left\| \begin{matrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{matrix} \right\| \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left\| \left[\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \right] \right\| \\
&= \frac{1}{2}\left|[6, 6, 3]\right| \\
&= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{6^2 + 6^2 + 3^2} \\
&= \frac{9}{2}
\end{aligned}$$

Arealet av trekanten er $\frac{9}{2}$.

12.104

a Bestem arealet av parallellogrammet utspent av vektorene $\vec{a} = [1, -3, 2]$ og $\vec{b} = [-2, 5, 1]$.

b Bestem arealet av trekanten utspent av vektorene $\vec{c} = [5, -7, 11]$ og $\vec{d} = [-2, 3, 2]$.

12.105

Punktene $A(-2, 3, 1)$, $B(-1, 1, -2)$ og $C(2, 3, -2)$ danner en trekant ABC.

a Finn arealet av $\triangle ABC$.

b Finn avstanden fra C til AB.

12.106

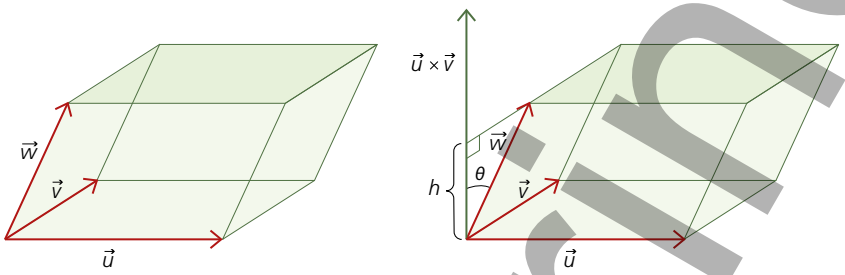
En trekant har hjørner i $A(3, 1, 2)$, $B(4, 3, 2)$ og $C(1+t, 2t, 4)$.

a Bestem arealet av $\triangle ABC$.

b Hvordan kan det ha seg at arealet ikke er avhengig av t?

Tilvurdering

La vektorene $\vec{u}$, $\vec{v}$ og $\vec{w}$ ha det samme startpunktet.
De utspenner et *parallellepiped*. Dette er en romfigur som er avgrenset av seks parvis parallelle sideflater, der sideflatene i hvert par er like parallellogrammer.



Siden grunnflaten er et parallellogram, er arealet av grunnflaten $|\vec{u}\times\vec{v}|$.
Vektorproduktet $\vec{u}\times\vec{v}$ står vinkelrett på både $\vec{u}$ og $\vec{v}$, og dermed også på grunnflaten i parallellepipedet. Høyden h kan vi derfor finne langs vektoren $\vec{u}\times\vec{v}$. Av figuren til høyre ovenfor ser vi at h er katet i en rettvinklet trekant der hypotenusen er $|\vec{w}|$. Vinkelen θ i trekanten er samtidig vinkelen mellom $\vec{u}\times\vec{v}$ og $\vec{w}$. Det gir $h=|\vec{w}|\cdot\cos\theta$.
Volumet er arealet av grunnflaten multiplisert med høyden, det vil si

$$|\vec{u}\times\vec{v}|\cdot|\vec{w}|\cdot\cos\theta$$

Vi har her produktet av lengdene av de to vektorene $\vec{u}\times\vec{v}$ og $\vec{w}$ multiplisert med cosinus til vinkelen mellom dem. Dette gjenkjenner vi som skalarproduktet

$$(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w}$$

Dette uttrykket kaller vi *trevektorproduket, trippelproduktet*, eller *volumproduktet*.
Vi er ikke helt i mål. Figuren vi støttet oss på, er tegnet slik at $\vec{u}\times\vec{v}$ peker oppover i forhold til grunnflaten. Hvis $\vec{u}\times\vec{v}$ i stedet peker nedover, vil $\cos\theta$ ha samme absoluttverdi, men negativt fortegn. Volumet er i så fall lik absoluttverdien av trevektorproduket.

La $\vec{u}$, $\vec{v}$ og $\vec{w}$ være tre vektorer i rommet som ikke er parallelle. De utspenner da et parallellepiped med volumet

$$|(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w}|$$

Merk!
Det spiller ingen rolle hvilken av de seks sideflatene vi tenker på som grunnflaten. Det er derfor det samme hvilke to av de tre vektorene som inngår i vektorproduktet. Det gir tre uttrykk for volumet:
$|(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w}|=|(\vec{u}\times\vec{w})\cdot\vec{v}|=|(\vec{v}\times\vec{w})\cdot\vec{u}|$.

Tilvurdering

EKSEMPEL 25

Et parallellepiped er utspent av vektorene [6 , 0 , 2], [5 , 1 , 3] og [0 , 4 , 6]. Finn volumet av parallellepipedet.

Vi velger to av vektorene, og finner vektorproduktet av dem.

$$[6,0,2]\times[5,1,3]=\begin{vmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z\\ 6 & 0 & 2\\ 5 & 1 & 3\end{vmatrix}$$

$$=\left[\begin{vmatrix}0 & 2\\ 1 & 3\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}6 & 2\\ 5 & 3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}6 & 0\\ 5 & 1\end{vmatrix}\right]$$

$$=[-2,-8,6]$$

Så finner vi skalarproduktet av denne vektoren og den tredje vektoren som utspenner parallellepipedet.

$$[-2,-8,6]\cdot[0,4,6]=-2\cdot 0+(-8)\cdot 4+6\cdot 6=4$$

Volumet av parallellepipedet er 4.

12.107

Et parallellepiped er utspent av vektorene [1, 1, 4], [2 , 2 , 1] og [4 , 2 , 3]. Finn volumet av parallellepipedet.

12.108

Et parallellepiped er utspent av vektorene [0 , 0 , 4], [3 , 0 , 0] og [0 , 2 , 0].

a Lag en skisse av parallellepipedet. Hva kaller vi et slikt parallellepiped?

b Regn ut volumet av parallellepipedet.

12.109

Punktene $A(1 , 0 , 0)$, $B(4 , 1 , 1)$, $C(5 , 6 , 2)$, $D(2 , 5 , 1)$, $E(2 , 1 , 4)$, $F(5 , 2 , 5)$, $G(6 , 7 , 6)$ og $H(3 , 6 , 5)$ er gitt.

a Vis at firkanten *ABCD* er et parallellogram.

b Vis at $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{DH}$ og forklar at *ABCDEFGH* danner et parallellepiped. Finn volumet av parallellepipedet.

Til vurdering

Trevektorproduktet som determinant

Et parallellepiped er utspent av vektorene $\vec{u} = [x_1, y_1, z_1]$, $\vec{v} = [x_2, y_2, z_2]$ og $\vec{w} = [x_3, y_3, z_3]$. Volumet er da absoluttverdien av trevektorproduktet $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$. Siden

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \left[\begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \right]$$

får vi

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) &= [x_1, y_1, z_1] \cdot \left[\begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \right] \\ &= x_1 \cdot \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} - y_1 \cdot \begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} + z_1 \cdot \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \\ &= \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \end{aligned}$$

Vektorene $\vec{u}$, $\vec{v}$ og $\vec{w}$ utspenner et parallellepiped med volum V lik absoluttverdien av determinanten til vektorene:

$$V = |\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})|$$

Til vurdering

EKSEMPEL 26

I parallellepipedet *ABCDEFGH* er grunnflaten *ABCD* et parallellogram og *AE* er én av sidekantene. Punktene $A(1, 3, 2)$, $B(2, 1, 4)$, $D(3, 2, 0)$ og $E(2, 1, 10)$ er gitt.
Finn volumet av parallellepipedet.

Vi finner først tre vektorer som utspenner parallellepipedet.

$$\overrightarrow{AB} = [2-1, 1-3, 4-2] = [1, -2, 2]$$
$$\overrightarrow{AD} = [3-1, 2-3, 0-2] = [2, -1, -2]$$
$$\overrightarrow{AE} = [2-1, 1-3, 10-2] = [1, -2, 8]$$

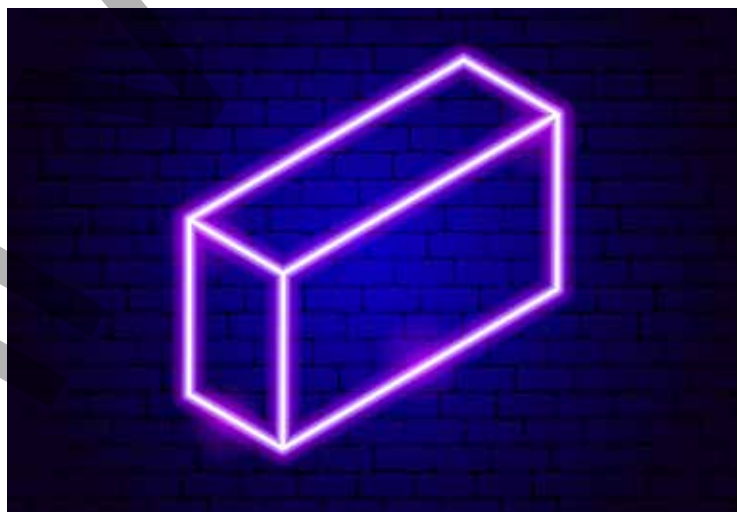
Så finner vi determinanten til disse vektorene.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 8 \end{vmatrix} - (-2) \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$$
$$= -1 \cdot 8 - (-2) \cdot (-2) + 2 \cdot (2 \cdot 8 - (-2) \cdot 1) + 2 \cdot (2 \cdot (-2) - (-1) \cdot 1)$$
$$= 18$$

Volumet av parallellepipedet er 18.

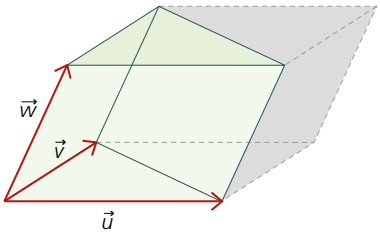
12.110
I parallellepipedet *ABCDEFGH* er grunnflaten *ABCD* et parallellogram og *AE* er én av sidekantene. Punktene $A(1, 0, 1)$, $B(2, 1, 0)$, $D(3, 2, 0)$ og $E(-1, 2, 7)$ er gitt.

a Finn volumet av parallellepipedet.
b Finn høyden av parallellepipedet.

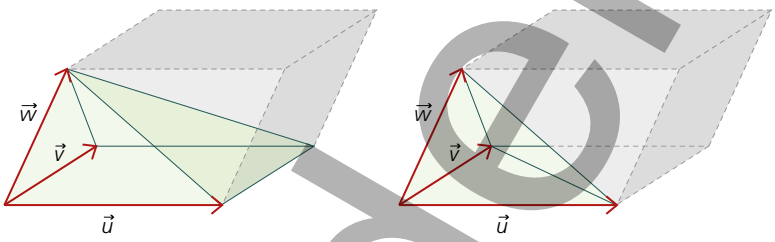


Tilvurdering

Avledede figurer



Hvis vi deler et parallellepiped gjennom diagonalene i topp- og grunnflaten, får vi to skeive prismer med trekantet grunnflate. Hvert av prismene har halvparten så stort volum som det opprinnelige parallellepipedet. Se figuren ovenfor.



Volumet av en pyramide er én tredel av produktet av grunnflaten og høyden. Grunnflaten i en pyramide utspent av tre vektorer kan være en trekant eller et parallellogram.

- Hvis grunnflaten er et parallellogram (figuren til venstre), er volumet én tredel av parallellepipedets volum.
- Hvis grunnflaten er en trekant (figuren til høyre), er arealet av grunnflaten halvert. Volumet er derfor én seksdel av parallellepipedets volum. En slik pyramide har totalt fire trekantete flater, og vi kaller den et *tetraeder*.

Vektorene $\vec{u}$, $\vec{v}$ og $\vec{w}$ er ikke parallelle og ligger ikke i samme plan. De kan utspenne

- et parallellepiped med volum $|\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})|$
- et trekantet prisme med volum $\frac{1}{2} \cdot |\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})|$
- en firkantet pyramide med volum $\frac{1}{3} \cdot |\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})|$
- et tetraeder med volum $\frac{1}{6} \cdot |\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})|$

Tilvurdering

EKSEMPEL 27

Et tetraeder har hjørner i $A(1, -1, 2)$, $B(4, 1, 6)$, $C(2, 2, 2)$ og $D(3, 0, -2)$. Finn volumet av tetraedret.

Vi finner først tre vektorer som utspenner tetraedret.

$$\overrightarrow{AB} = [4-1, 1-(-1), 6-2] = [3, 2, 4]$$
$$\overrightarrow{AC} = [2-1, 2-(-1), 2-2] = [1, 3, 0]$$
$$\overrightarrow{AD} = [3-1, 0-(-1), -2-2] = [2, 1, -4]$$

Så finner vi determinanten til disse vektorene.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= 3 \cdot (3 \cdot (-4) - 0 \cdot 1) - 2 \cdot (1 \cdot (-4) - 0 \cdot 2) + 4 \cdot (1 \cdot 1 - 3 \cdot 2)$$
$$= -48$$

Volumet av tetraedret er

$$\frac{1}{6} \cdot \left| \det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right) \right| = \frac{1}{6} \cdot |-48| = \frac{1}{6} \cdot 48 = 8$$

12.111

Et tetraeder har hjørner i $O(0, 0, 0)$, $P(3, -1, -2)$, $Q(6, 2, -1)$ og $R(5, 10, 0)$.

a Finn volumet av tetraedret.

b Finn avstanden fra toppunktet R til grunnflaten OPQ.

12.112

Et tetraeder har hjørner i $O(0, 0, 0)$, $P(3, -1, -2)$, $Q(6, 2, -1)$ og $R(5, 10, 0)$. Tegn tetraedret, og finn volumet av det på ulike måter.

12.113

Bestem volumet av

a et trekantprisme der $\vec{a} = [0, 0, 4]$ og $\vec{b} = [3, 0, 0]$ spenner ut grunnflaten og $\vec{c} = [0, 2, 0]$ er en sidekant

b en pyramide med firkantet grunnflate der $\vec{a} = [0, 3, 4]$ og $\vec{b} = [1, -2, 2]$ spenner ut grunnflaten, og $\vec{c} = [-2, 5, 3]$ er en sidekant

SNAKK

Jens har koordinatene til fire punkter A, B, C og D.

Han regner ut $\frac{1}{6} \cdot \left| (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD} \right|$. Svaret blir 0.

Hvilken konklusjon kan Jens trekke?

Tilvurdering

RØDE OPPGAVER

12.114

Et tetraeder har hjørner i $O(0, 0, 0)$, $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$ og $C(0, 0, c)$.

a Lag en skisse av tetraedret når $a = b = c = 5$.

b Bruk vektorregning til å finne volumet av tetraedret uttrykt ved a, b og c.

Vis at formelen for volumet av en pyramide, $V = \frac{1}{3}G \cdot h$, gir samme resultat.

12.115 (Eksamen Forkurset 2015)

Gitt tre punkter $A(0, 0, 0)$, $B(3, 1, 0)$ og $C(2, 4, 0)$.

a Bestem $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$ og $\angle C$.

b A, B og C utgjør tre av hjørnene i et parallellogram. Vis at punktet $D(-1, 3, 0)$ utgjør det siste hjørnet når $ABCD$ skal være et parallellogram.

c $ABCD$ utgjør grunnflaten i en pyramide med toppunkt $T(1, 2, 5)$.
Vis og forklar hvorfor dette er en rett pyramide med kvadratisk grunnflate.

d Regn ut volumet av pyramiden $ABCDT$.

e Regn ut arealet av sideflaten ABT.

BLÅ OPPGAVER

12.116 (Eksamen Forkurset 2009)

Vi har gitt tre punkter i rommet: $A(1, 2, 0)$, $B(4, 3, 2)$ og $C(3, 6, 2)$.

a Beregn $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $|\overrightarrow{AB}|$, $|\overrightarrow{AD}|$ og vinkelen mellom disse to vektorene.

b Beregn koordinatene til et punkt C slik at $ABCD$ blir et parallellogram.

c Bestem arealet av parallellogrammet $ABCD$.

d Et punkt $T(x, 3, 7)$ er toppunkt i en pyramide med grunnflate $ABCD$.
Beregn verdien av x slik at pyramidens volum er 12.

e Beregn høyden i pyramiden.

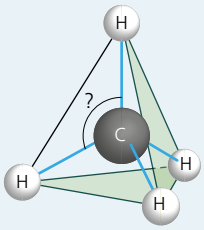
12.117

Et regulært tetraeder er en pyramide der de fire sideflatene er likesidete trekanter.
I et regulært tetraeder $ABCD$ er siden 1. Tetraedret er plassert slik at A faller sammen med origo, B ligger på x-aksen, ingen av hjørnene har negative koordinater og bare D har z-koordinat forskjellig fra 0.

a Bestem koordinatene til hjørnene i tetraedret eksakt.

b Bruk vektorregning til å finne volumet og overflaten av tetraedret.

Metan, CH_4, har den stabile *tetraederstrukturen*. I hvert hjørne er det et hydrogenatom, og karbonatomet ligger like langt fra dem alle.
Bindingsvinkelen H–C–H er kjent som *tetraedervinkelen*.



c Bestem tetraedervinkelen med to desimalers nøyaktighet.

Til vurdering

SAMMENDRAG

Like vektorer

$$[x_1, y_1, z_1] = [x_2, y_2, z_2]$$
$$\Updownarrow$$
$$x_1 = x_2 \quad \wedge \quad y_1 = y_2 \quad \wedge \quad z_1 = z_2$$

Like vektorer har samme lengde og samme retning.

Lengden av en vektor

$$|[x, y]| = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$|[x, y, z]| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Parallelle vektorer

$$\vec{u} \parallel \vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{u} = k\vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$$

Ortogonale vektorer

$$\vec{u} \perp \vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

Regneregler

$$[x_1, y_1, z_1] \pm [x_2, y_2, z_2] = [x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2, z_1 \pm z_2]$$
$$k \cdot [x_1, y_1, z_1] = [kx_1, ky_1, kz_1]$$
$$a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$$
$$(a + b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}$$
$$(ab)\vec{u} = a(b\vec{u})$$

Skalarproduktet

$$[x_1, y_1, z_1] \cdot [x_2, y_2, z_2] = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$$
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\theta$$
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$
$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$
$$\vec{u} \cdot (k\vec{v}) = (k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$$
$$\vec{u}^2 = |\vec{u}|^2$$

Vektorproduktet

$$[x_1, y_1, z_1] \times [x_2, y_2, z_2] = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

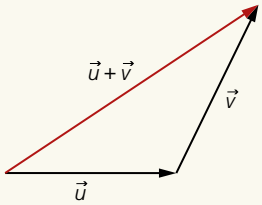
$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin\theta$$

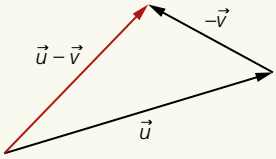
$\vec{u} \times \vec{v}$ er ortogonal med både $\vec{u}$ og $\vec{v}$.
$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v})$ er et høyrehåndssystem.

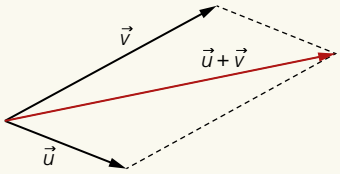
To vektorer $\vec{u}$ og $\vec{v}$ utspenner et parallellogram med arealet $|\vec{u} \times \vec{v}|$.
Tre vektorer $\vec{u}$, $\vec{v}$ og $\vec{w}$ utspenner et parallellepiped med volumet $|(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$.

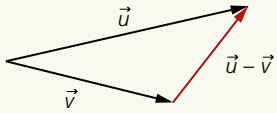
$$\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$$
$$\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$$
$$\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + u \times \vec{w}$$
$$(k\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (k\vec{v}) = k(\vec{u} \times \vec{v})$$

Addisjon og subtraksjon









Til vurdering