7

Logaritmer

KAPITTELINNHOLD

7A Briggske og naturlige logaritmer *137*
7B Logaritmesetningene *143*
7C Logaritme- og eksponentiallikninger *150*
7D Logaritmefunksjoner *160*
7E Generelle logaritmer *164*

I dette kapitlet skal du lære om logaritmer.

Du får vite at:

$\log_2 1 = 0$	$\log_3 1 = 0$	$\log_4 1 = 0$
$\log_2 2 = 1$	$\log_3 3 = 1$	$\log_4 4 = 1$
$\log_2 4 = 2$	$\log_3 9 = 2$	$\log_4 16 = 2$

Ser du noen sammenheng?

Hva tror du at $\log_5 125$ er?
Hva med $\log_6 36$?

Til vurdering

7A Briggske og naturlige logaritmer

Hvilket tall må vi opphøye 2 i for at potensen skal bli lik 64?
Svaret på spørsmålet kaller vi 2-logaritmen til 64.
Vi har at $2^6 = 64$.
Tallet 64 har 2-logaritmen 6, og vi skriver $\log_2 64 = 6$.

4-logaritmen til 64 er det tallet vi må opphøye 4 i for at svaret skal bli 64.
Vi har at $4^3 = 64$.
Det betyr at $\log_4 64 = 3$.

Siden $8^2 = 64$, må $\log_8 64 = 2$.

De blå tallene 2, 4 og 8 ovenfor er *grunntall* for logaritmene.

Vi skal konsentrere oss om to spesielle logaritmer som vi kaller *briggske logaritmer* og *naturlige logaritmer*. De briggske logaritmene har grunntall 10, og de naturlige logaritmene har grunntall e, eulertallet. Vi vil se mer på generelle logaritmer i kapittel 7E.

Briggske logaritmer

På 1600-tallet kom noen matematikere på at det kunne være smart å skrive alle positive tall som *tierpotenser*, altså potenser med 10 som grunntall. Eksponenten i disse potensene kalte de for logaritmer.

For eksempel fant de ut at $2 \approx 10^{0,3010}$ og at $50,2 \approx 10^{1,7007}$. Tallet 2 har altså logaritmen 0,3010, og tallet 50,2 har logaritmen 1,7007, avrundet til fire desimaler.

Den engelske matematikeren Henry Briggs (1561–1630) laget den første logaritmetabellen med grunntall 10 i 1617. Tabellen ga logaritmen til de 1000 første naturlige tallene med en nøyaktighet på 14 desimaler! Tabellen til Briggs ble blant annet brukt til store og krevende beregninger innen astronomi. Det ble sagt at tabellen forkortet astronomenes arbeid og forlenget deres liv!

Tilvurdering

p	lg p
2	0,30
3	0,48
5	0,70
7	0,85
11	1,04
13	1,11
17	1,23
19	1,28

Den briggske logaritmen til et positivt tall p, lg p, er det tallet vi må opphøye 10 i for å få p:

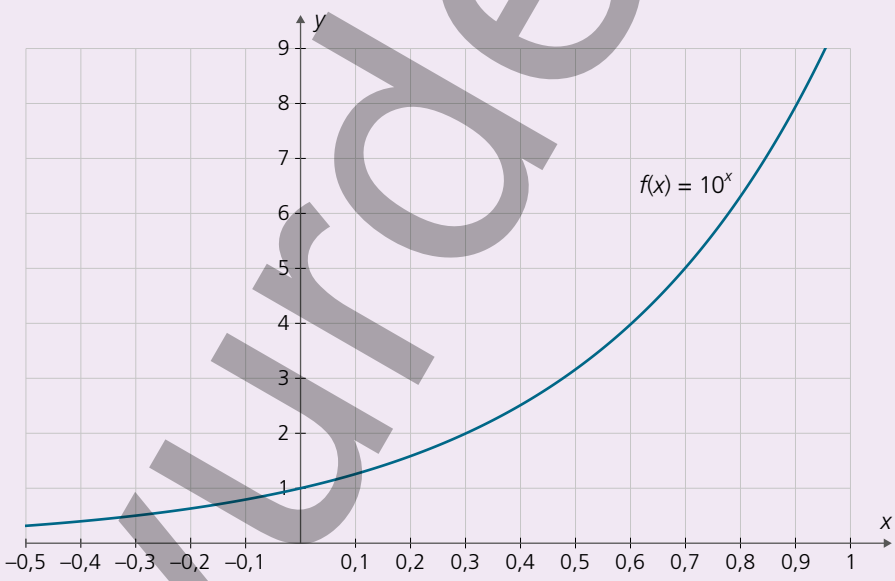
$$10^{\lg p} = p$$

Merk!
Vi skriver lg p i stedet for $\log_{10} p$.
Andre navn på den briggske logaritmen er *tierlogaritmen* og *10-logaritmen*.

I margen ser du et lite utdrag av en logaritmetabell med en nøyaktighet på 2 desimaler.

UTFORSK

Figuren viser grafen til funksjonen f gitt ved $f(x) = 10^x$.



a Fra tabellen i margen ovenfor kan vi lese at $\lg 5 \approx 0{,}70$.
Forklar hvordan vi kan bruke figuren til å bekrefte dette.

b Bruk figuren til å finne en tilnærmingsverdi for

1 lg 7 **2** lg 4 **3** lg 1 **4** lg 0,5

c Er det mulig å finne en verdi for lg 0?

d Er det mulig å finne en verdi for logaritmen til et negativt tall?

e Kan logaritmen til et tall være negativ?

Tilvurdering

Vi kan finne den briggske logaritmen til alle positive tall. Uansett hvilket tall vi opphøyer 10 i, vil svaret alltid bli et positivt tall. Vi kan derfor ikke finne logaritmen til negative tall og null.

Noen logaritmer klarer vi å regne ut uten tabell eller hjelpemidler.

$\lg 10 = 1$ fordi $10^1 = 10$
$\lg 100 = 2$ fordi $10^2 = 100$
$\lg 1000 = 3$ fordi $10^3 = 1000$
$\lg 1 = 0$ fordi $10^0 = 1$
$\lg 0{,}1 = -1$ fordi $10^{-1} = 0{,}1$

$$\lg 10^k = k$$

EKSEMPEL 1

Bruk definisjonen av den briggske logaritmen til å finne

a $10^{\lg 3}$ **b** $\lg 0{,}01$ **c** $\lg \sqrt{10}$

a $10^{\lg 3} = 3$

b $\lg 0{,}01 = \lg 10^{-2} = -2$

c $\lg \sqrt{10} = \lg 10^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

7.1

Bruk definisjonen av den briggske logaritmen til å finne

a $10^{\lg 6}$ **b** $10^{\lg 0{,}5}$ **c** $\lg 10^5$ **d** $\lg 10^{-2{,}5}$

e $\lg 10\,000$ **g** $\lg 0{,}0001$ **g** $\lg \sqrt[3]{10}$ **h** $\lg \sqrt[5]{1000}$

Programmet nedenfor beregner lg 500.

```
from pylab import *

print(log10(500))
```

Utskriften ser slik ut:

2.6989700043360187

Tilvurdering

SNAKK

«Det er ingen overraskelse at den briggske logaritmen til 500 er et tall mellom 2 og 3.»
Kommenter dette utsagnet.

7.2
Vi har logaritmene nedenfor.

1 lg 7 **2** lg 0,80 **3** lg 4,5 **4** lg 95

a Bestem logaritmene grafisk ved å ta utgangspunkt i grafen til eksponentialfunksjonen gitt ved $f(x) = 10^x$.
b Lag et program som bestemmer logaritmene.
c Skriv tallene 7, 0,80, 4,5 og 95 som tierpotenser.

SNAKK

Hvis lg a er et tall i intervallet $\langle 0, 1\rangle$, hva vet vi da om a?
Hvis lg a er et negativt tall, hva vet vi da om a?

Naturlige logaritmer

Eulertallet dukker ofte opp i naturvitenskapelige modeller.
Logaritmen med e som grunntall kaller vi derfor den *naturlige* logaritmen.
Den naturlige logaritmen til p skriver vi ln p.
Det er ikke vanlig å bruke skrivemåten $\log_e p$.

Den naturlige logaritmen til et positivt tall p, ln p, er det tallet vi må opphøye e i for å få p:

$$e^{\ln p} = p$$

Merk!
- $\ln 1 = 0$ fordi $e^0 = 1$
- $\ln e = 1$ fordi $e^1 = e$
- $\ln e^k = k$ fordi $e^k = e^k$

Tilvurdering

EKSEMPEL 2

Bruk definisjonen av den naturlige logaritmen til å finne

a $e^{\ln 2}$ **b** $\ln \frac{1}{e^3}$

a $e^{\ln 2} = 2$ $e^{\ln p} = p$

b $\ln \frac{1}{e^3} = \ln e^{-3} = -3$ $\ln e^k = k$

7.3

Bruk definisjonen av den naturlige logaritmen til å finne

a $e^{\ln 3}$ **b** $\ln e^2$ **c** $e^{\ln 1}$ **d** $\ln \frac{1}{e^3}$

Programmet nedenfor beregner ln 2.

```
from pylab import *

print(log(2))
```

Utskriften ser slik ut:

0.6931471805599453

EKSEMPEL 3

Skriv 2^x på formen e^{kx}.

$2^x = \left(e^{\ln 2}\right)^x = e^{(\ln 2)\cdot x} = e^{0{,}693x}$

7.4

Skriv 3^x og $0{,}5^x$ på formen e^{kx}.

7.5

Et kunstverk er verdt 250 000 kr i 2023. Verdiøkningen er antatt å være 25 % hvert år. Lag et uttrykk for verdien av kunstverket t år etter 2023 på formen

a Ca^t **b** Ce^{kt}

Tilvurdering

RØDE OPPGAVER

7.6
Skriv så enkelt som mulig.

a $\lg 10^8$ **b** $\lg 10^x$ **c** $\ln e^2$ **d** $\ln e^{5x}$

7.7
Skriv så enkelt som mulig.

a $\lg 10\,000$ **b** $\lg 0{,}01$ **c** $\ln e$ **d** $e^{\ln 10}$

7.8
Skriv så enkelt som mulig.

a $\lg 10 - \lg 1$ **b** $\ln 1 - \ln e^2$ **c** $\lg 100 - \lg 10^{-2}$ **d** $\ln e^3 - e^{\ln 3}$

7.9
Skriv tallene i stigende rekkefølge.

$\lg 1$ $\ln e^3$ $\lg 0{,}1$ $\ln e$ $\lg \sqrt{10}$

BLÅ OPPGAVER

7.10
Skriv 1,35 som en potens med

a 10 som grunntall **b** e som grunntall

7.11
Skriv tallene i stigende rekkefølge.

$\lg 100^3$ $10^{\lg e}$ $\lg e$ $\lg \sqrt[3]{100^2}$ $\ln(\lg 10^e)$

7.12
Skriv så enkelt som mulig.

a $\lg 100 - \ln \frac{1}{e^2}$ **b** $\lg(\ln e)$ **c** $e^{\ln 2 + \ln 3}$ **d** $\ln \sqrt[3]{e^5} - \lg \sqrt[3]{100}$

7.13
Skriv så enkelt som mulig.

a $e^{3\ln 3}$ **b** $\lg 100^x$ **c** $\ln \frac{1}{\sqrt{e}}$ **d** $10^{2\lg 4}$

Til vurdering

7B Logaritmesetningene

Vi har tre regneregler for logaritmer. Disse kaller vi *logaritmesetningene*, og de gjelder for alle positive grunntall forskjellig fra 1. Når vi bruker den briggske logaritmen, er grunntallet 10. Når vi bruker den naturlige logaritmen, er grunntallet e.

Første logaritmesetning

Den første logaritmesetningen sier at logaritmen til et produkt er lik summen av logaritmen til hver av faktorene.

La a og b være positive tall. Da er

$$\lg ab = \lg a + \lg b$$
$$\ln ab = \ln a + \ln b$$

Merk!
For å være ekstra tydelig kan vi bruke parentes rundt produktet:

$$\lg (ab) = \lg a + \lg b$$
$$\ln (ab) = \ln a + \ln b$$

EKSEMPEL 4

Gitt at $\ln 3 \approx 1{,}1$ og $\ln 4 \approx 1{,}4$.
Bestem en tilnærmingsverdi for $\ln 12$.

$$\begin{aligned} \ln 12 &= \ln (3 \cdot 4) \\ &= \ln 3 + \ln 4 \qquad \text{Første logaritmesetning} \\ &\approx 1{,}1 + 1{,}4 \\ &= 2{,}5 \end{aligned}$$

7.14
Gitt at $\lg 2 \approx 0{,}3$ og $\lg 5 \approx 0{,}7$.

a Bestem en tilnærmingsverdi for $\lg 25$.
b Bestem en tilnærmingsverdi for $\lg 8$.
c Bestem en tilnærmingsverdi for $\lg 20$.

Til vurdering

7.15
Bruk første logaritmesetning til å forenkle uttrykkene.

a $\lg(100x)+\lg(10x)$ **b** $\ln 4e^{2x}-\ln 4$ **c** $3\ln 2e^{2x}+2\ln e^{-3x}$

7.16
Vis at $\ln x^2+\ln x=3\ln x$.

EKSEMPEL 5

Bevis at $\ln ab=\ln a+\ln b$, der $a>0$ og $b>0$.

Vi bruker definisjonen av naturlige logaritmer til å skrive produktet ab på to måter.

- $ab=e^{\ln ab}$
- $ab=e^{\ln a}\cdot e^{\ln b}=e^{\ln a+\ln b}$

De to uttrykkene for ab må være like. Altså er $e^{\ln ab}=e^{\ln a+\ln b}$.
To like potenser med samme grunntall må ha like eksponenter.
Altså er $\ln ab=\ln a+\ln b$.

7.17
Bevis at $\lg ab=\lg a+\lg b$, der $a>0$ og $b>0$.

Andre logaritmesetning

Den andre logaritmesetningen sier at logaritmen til en brøk er lik logaritmen til telleren minus logaritmen til nevneren.

La a og b være positive tall. Da er

$$\lg\frac{a}{b}=\lg a-\lg b$$

$$\ln\frac{a}{b}=\ln a-\ln b$$

Tilvurdering

EKSEMPEL 6

Skriv så enkelt som mulig.

$$\ln \frac{x}{e^6} - \ln xe$$

$$\ln \frac{x}{e^6} - \ln xe = \ln x - \ln e^6 - (\ln x + \ln e)$$ Første og andre logaritmesetning

$$= \ln x - 6 - \ln x - 1$$ $\ln e^k = k$

$$= -7$$

7.18

Bruk logaritmesetningene til å forenkle uttrykkene.

a $2 \lg \frac{10}{x} + \lg \frac{x}{100}$

b $\ln xe^3 - 3 \ln \frac{e}{x}$

c $\ln \frac{e}{x} - \ln \frac{e^2}{x}$

7.19

Gitt at $\lg 2 \approx 0{,}3$ og $\lg 5 \approx 0{,}7$.

a Bestem en tilnærmingsverdi for $\lg 2{,}5$.

b Bestem en tilnærmingsverdi for $\lg 0{,}4$.

c Bestem en tilnærmingsverdi for $\lg 0{,}8$.

7.20

Vis at $\lg\left(\frac{1}{a}\right) = -\lg a$.

SNAKK

Jørgen og Jonas diskuterer uttrykket $\ln(a+b) - \ln b$.
Jørgen mener at han kan forenkle uttrykket til $\ln a$, men Jonas er uenig.
Kommenter.

Til vurdering

Tredje logaritmesetning

La a være et positivt tall. Da er

$$\lg a^b = b \cdot \lg a$$
$$\ln a^b = b \cdot \ln a$$

Merk!

- $\lg x^2$ er det samme som $\lg(x^2)$.
  Hvis $x > 0$, er dette også ifølge tredje logaritmesetning lik $2 \cdot \lg x$.
- $(\lg x)^2$ er det samme som $(\lg x) \cdot (\lg x)$.

EKSEMPEL 7

Skriv uttrykket $3 \lg x^3 + 2 \lg \sqrt{x}$ så enkelt som mulig.

$$\begin{aligned} 3 \lg x^3 + 2 \lg \sqrt{x} &= 3 \lg x^3 + 2 \lg x^{\frac{1}{2}} \\ &= 3(3 \cdot \lg x) + 2\left(\frac{1}{2} \cdot \lg x\right) \\ &= 9 \lg x + \lg x \\ &= 10 \lg x \end{aligned}$$

Tredje logaritmesetning

SNAKK

Ummair, Marie og Ane skal skrive uttrykket $\lg x^2 - \lg x$ enklere.

Ummair prøver slik: $\lg x^2 - \lg x = 2 \lg x - \lg x = \lg x$

Marie prøver slik: $\lg x^2 - \lg x = \lg\left(\frac{x^2}{x}\right) = \lg x$

Ane prøver slik: $\lg x^2 - \lg x = \lg(x \cdot x) - \lg x = \lg x + \lg x - \lg x = \lg x$

Kommenter framgangsmåtene. Hvilken foretrekker du?

7.21

Bruk logaritmesetningene til å forenkle uttrykkene.

a $\lg a^3 + \lg a^2$ **b** $2 \lg b^8 - 2 \lg b^7$ **c** $\lg c + 8 \lg c^2 - 2 \lg c^{-2}$

Tilvurdering

7.22
Bruk logaritmesetningene til å forenkle uttrykkene.
a $\ln x^5 + \ln x^{-2}$ **b** $5\ln y^4 - \ln y^7$ **c** $6\ln z^3 + 2\ln\sqrt{z} + \ln z^{-1}$

7.23
Bruk logaritmesetningene til å forenkle uttrykkene.
a $\lg ab + \lg a^2b + \lg b^{-3}$

b $3\lg ab^3 - \lg b^9$

c $5\ln\left(ab^2\right) + 2\ln\left(a^3b\right) - 3\ln\left(ab^6\right)$

d $\lg\left(\frac{a}{b}\right) + \lg\left(\frac{a}{b^2}\right) + 2\lg\left(\frac{1}{b}\right)$

e $\ln\left(\frac{1}{a^2b^3}\right) - 3\ln\left(\frac{a}{b^{-2}}\right)$

f $\ln\left(\frac{5a^2}{b}\right) - \ln\left(\frac{5}{a^{-2}}\right)$

7.24
Gitt at $\lg 5 \approx 0{,}7$.

a Bestem en tilnærmingsverdi for $\lg 125$.
b Bestem en tilnærmingsverdi for $\lg\sqrt{5}$.
c Bestem en tilnærmingsverdi for $\lg 0{,}2$.

EKSEMPEL 8

Vis at vi kan skrive $2\lg 3 + 3\lg 2$ som $\lg 72$.

$$\begin{aligned} 2\lg 3 + 3\lg 2 &= \lg 3^2 + \lg 2^3 && \text{Tredje logaritmesetning} \\ &= \lg 9 + \lg 8 \\ &= \lg(9\cdot 8) && \text{Første logaritmesetning} \\ &= \lg 72 \end{aligned}$$

7.25
Vis at
a $3\ln 5 + 2\ln 10 = \ln 12\,500$
b $\lg(x+2) + \lg 2 = \lg(2x+4)$
c $\lg(x^2-9) - \lg(x+3) = \lg(x-3)$

Til vurdering

7.26

Avgjør om det skal stå = eller ≠ i rutene.

a $\ln(x-4)+\ln 4 \;\square\; \ln x$

b $\ln(6\cdot x)+\ln 2 \;\square\; \ln 12x$

c $\lg(x+1)-\lg 9 \;\square\; \lg(x-8)$

d $\ln x\cdot\ln 3 \;\square\; \ln(x+3)$

e $\lg(10x) \;\square\; 1+\lg x$

f $\lg(10+x) \;\square\; 1+\lg x$

Sammenhengen mellom briggske og naturlige logaritmer

La x være et positivt tall. Da er

$$\lg x = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

La oss se på beviset for denne sammenhengen.

$$10^{\lg x} = x$$ Definisjonen av briggske logaritmer

$$\ln 10^{\lg x} = \ln x$$ Hvis $a = b$, er også $\ln a = \ln b$.

$$\lg x\cdot\ln 10 = \ln x$$ Tredje logaritmesetning

$$\lg x = \frac{\ln x}{\ln 10}$$ Vi deler med ln 10 på begge sider.

Tilvurdering

RØDE OPPGAVER

7.27

Bruk logaritmesetningene til å forenkle uttrykkene.

a $\lg a + \lg a^2$ **b** $\ln \frac{a}{b} + \ln b$ **c** $\ln a^3 b + \ln \frac{1}{b^{-1}}$ **d** $\lg ab - \lg 10a$

7.28

Bruk logaritmesetningene til å forenkle uttrykkene.

a $\ln\left(ab^3\right) + \ln\left(\frac{a}{b^3}\right)$ **b** $\ln xy + \ln \frac{x}{y} + \lg 10^{\ln x}$ **c** $\lg\left(3 \cdot 10^x\right) - \lg\left(\frac{3}{10^x}\right)$

7.29

Johannes og Vetle skal forenkle uttrykket $\ln(a^2 - b^2) - \ln(a + b)$. Kommenter løsningene.

Johannes gjør slik:

$$\begin{aligned}\ln(a^2 - b^2) - \ln(a + b) &= \ln a^2 - \ln b^2 - \ln a - \ln b \\ &= 2\ln a - 2\ln b - \ln a - \ln b \\ &= \ln a - 3\ln b\end{aligned}$$

Vetle gjør slik:

$$\begin{aligned}\ln(a^2 - b^2) - \ln(a + b) &= \ln\left(\frac{a^2 - b^2}{a + b}\right) \\ &= \ln\left(\frac{(a + b) \cdot (a - b)}{(a + b)}\right) \\ &= \ln(a - b)\end{aligned}$$

BLÅ OPPGAVER

7.30

Bruk logaritmesetningene til å forenkle uttrykkene.

a $\ln(a \cdot b)^2 - \ln ab + \ln(a - b)$ **b** $\frac{\lg x^3 - \lg x^{-5}}{\lg \frac{1}{x^2}}$ **c** $\frac{\ln \sqrt{x} - 2\ln x}{\ln \sqrt{x} + \ln x^2}$

7.31

Ta for deg uttrykket $\lg(ab)^2 + \lg \frac{b}{a} - 2\lg\left(a^{-2} \cdot b\right)$.

a Skriv uttrykket på formen $s\lg a + t\lg b$, der $s, t \in \mathbb{Z}$.

b Skriv uttrykket på formen $\lg u$, der u er uttrykt ved a og b.

7.32

Du skal bevise at $\lg a^b = b \cdot \lg a$ når $a > 0$.

a Forklar at vi kan skrive a^b som $10^{\lg a^b}$.

b Forklar at vi kan skrive a som $10^{\lg a}$.

c Bruk resultatet i oppgave b til å vise at vi kan skrive a^b som $10^{b \cdot \lg a}$.

d Forklar ut fra resultatene i oppgave a og c at $\lg a^b = b \cdot \lg a$.

7.33

Vis at $\lg e \cdot \ln x = \lg x$.

Tilvurdering

7C Logaritme- og eksponentiallikninger

Logaritmelikninger

En logaritmelikning er en likning som inneholder logaritmen til den ukjente. Her er noen eksempler på logaritmelikninger:

$\lg x = 3 \qquad \ln x = 0{,}5 \qquad \lg(x-5) = 2$

Ser du løsningen på noen av likningene?

Av logaritmedefinisjonene får vi ekvivalensene nedenfor.

$$\lg x = a \quad \Updownarrow \quad x = 10^a \qquad\qquad \ln x = a \quad \Updownarrow \quad x = e^a$$

Merk!
Fordi logaritmer bare er definert for positive tall, må vi alltid kontrollere at logaritmeuttrykkene i likningen vi starter med, er definert for de x-verdiene vi kommer fram til.

EKSEMPEL 9

Løs likningene.
a $\lg x = 2$ **b** $\ln x = 2$

a $\lg x = 2$
$x = 10^2$
$x = 100$

b $\ln x = 2$
$x = e^2$

7.34
Løs likningene.
a $\lg x = 3$ **b** $\ln x = 1$ **c** $\ln x + 3 = 1$ **d** $\lg x = 0$

Til vurdering

7.35
Løs likningene.

a $\ln 2x = 0$ **b** $\lg(x+3) = 2$ **c** $\ln x^3 = 6$ **d** $\lg(x-4) = 3$

7.36
Løs likningene.

a $6\ln x - 2 = 1$ **b** $\lg(x-2)\cdot(\lg x - 2) = 0$

EKSEMPEL 10

Løs likningen $\ln(2x-2) = 3\ln 2$.

$$\ln(2x-2) = 3\ln 2$$
$$\ln(2x-2) = \ln 2^3 \quad \text{Tredje logaritmesetning}$$
$$2x-2 = 8$$
$$2x = 10$$
$$x = 5$$

Merk!
Når a er et positivt tall, gjelder følgende:

$$\ln x = \ln a \qquad \lg x = \lg a$$
$$x = a \qquad x = a$$

EKSEMPEL 11

Løs likningen $\lg x + \lg(x-3) = 1$.

$$\lg x + \lg(x-3) = 1$$
$$\lg\big(x\cdot(x-3)\big) = 1 \quad \text{Første logaritmesetning}$$
$$\lg\left(x^2-3x\right) = 1$$
$$x^2 - 3x = 10^1$$
$$x^2 - 3x - 10 = 0$$
$$x = \frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot 1\cdot(-10)}}{2\cdot 1} \quad \textit{abc}\text{-formelen}$$
$$x = -2 \quad \vee \quad x = 5$$

Vi forkaster –2, for verken $\lg x$ eller $\lg(x-3)$ er definert for denne x-verdien. Likningen har løsningen $x = 5$.

Til vurdering

UTFORSK

Ole Henrik skal løse likningen i eksempel 11. Han starter slik:

$$\lg x + \lg(x-3) = 1$$
$$10^{\lg x + \lg(x-3)} = 10^1$$
$$10^{\lg x} \cdot 10^{\lg(x-3)} = 10$$

a Forklar hvert trinn i utregningen ovenfor.
b Hjelp Ole Henrik med å avslutte løsningen.
c Tale skal løse den samme likningen. Hun prøver slik:

$$\lg x + \lg(x-3) = 1$$
$$10^{\lg x} + 10^{\lg(x-3)} = 10^1$$

Hva gjør Tale galt?
d Jørgen prøver slik:

$$\lg x + \lg(x-3) = 1$$
$$\lg(x + x - 3) = 1$$

Hva tror du Jørgen har tenkt? Kommenter.

7.37
Løs likningene.
a $\lg x = \lg 3$ **b** $\ln x = 4\ln 2$ **c** $\lg 3x = 2\lg 3$

7.38
Løs likningene.
a $\ln(8-2x) = \ln x$ **b** $\lg x + \lg(x+3) = 1$ **c** $\lg(6-2x) - \lg x = 2$

EKSEMPEL 12

Løs likningen $\lg x^2 = 4$.

$$\lg x^2 = 4$$
$$x^2 = 10^4$$
$$x = \pm\sqrt{10\,000}$$
$$x = 100 \quad \vee \quad x = -100$$

Tilvurdering

SNAKK

Geir skal løse likningen i eksempel 12.
Han ser at hvis han bruker logaritmeregelen $\lg a^b = b \cdot \lg a$, blir venstre side av likningen $2 \lg x$. Regner han da videre, mister han den negative løsningen på likningen. Undersøk!

Han synes dette er merkelig. Når han løser likningen $\lg x^3 = 6$ med samme framgangsmåte, får han $x = 100$. Her mister han ingen løsning. Undersøk!

Hvorfor kan han bruke logaritmeregelen for å få hele løsningsmengden i likningen $\lg x^3 = 6$, men ikke i likningen $\lg x^2 = 4$? Diskuter!

7.39
Løs likningene.
a $\lg x^2 = 6$ **b** $\ln x^3 = 6$ **c** $\lg x^5 + \lg \frac{100}{x} = 6$

EKSEMPEL 13

Løs likningen $(\ln x)^2 + 5 \ln x + 6 = 0$.

$$(\ln x)^2 + 5 \ln x + 6 = 0$$

$$\ln x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1}$$ *abc*-formelen med ln *x* som ukjent

$$\ln x = \frac{-5 \pm 1}{2}$$

$$\ln x = -2 \quad \vee \quad \ln x = -3$$

$$x = e^{-2} \quad \vee \quad x = e^{-3}$$

$$x = \frac{1}{e^2} \quad \vee \quad x = \frac{1}{e^3}$$

7.40
Løs likningene.
a $(\lg x)^2 - 2\lg x - 3 = 0$ **b** $10 \ln x - (\ln x)^2 = -11$ **c** $(\lg x)^2 - 2 \lg x - 15 = 0$

7.41 (Eksamen Forkurset 2019)
Løs likningen ved regning. Løsningen skal gis ved eksakte svar.

$$(\ln x)^2 + 2\ln x = 8$$

7.42 (Eksamen Forkurset 2015)
Løs likningen ved regning.

$$3(\ln x)^2 - \ln x^5 - 2 = 0$$

Tilvurdering

UTFORSK

Lise skal løse likningen $\lg x^2 + 3\lg x = 10$. Hun fører slik:

$$\lg x^2 + 3\lg x = 10$$
$$2\lg x + 3\lg x = 10$$
$$5\lg x = 10$$
$$\lg x = 2$$
$$x = 10^2$$
$$x = 100$$

a Forklar løsningen ovenfor trinn for trinn.

Belinda og Matthew velger andre framgangsmåter når de løser oppgaven. De starter likt:

$$\lg x^2 + 3\lg x = 10$$
$$\lg x^2 + \lg x^3 = 10$$
$$\lg (x^2 \cdot x^3) = 10$$
$$\lg x^5 = 10$$

b Kommenter hvert trinn i utregningen ovenfor.

Deretter fører de ulikt.

Belinda:

$$5\lg x = 10$$
$$\lg x = 2$$
$$x = 10^2$$
$$x = 100$$

Matthew:

$$x^5 = 10^{10}$$
$$x = \sqrt[5]{10^{10}}$$
$$x = 100$$

c Forklar hvordan Belinda og Matthew kan ha tenkt.
Hvilken strategi ville du ha brukt for å løse likningen?

Til vurdering

EKSEMPEL 14

Løs ulikheten $(\lg x)^2 - 5\lg x + 6 > 0$.

Vi bruker nullpunktmetoden til å faktorisere venstresiden i ulikheten.

$$(\lg x)^2 - 5\lg x + 6 = 0$$

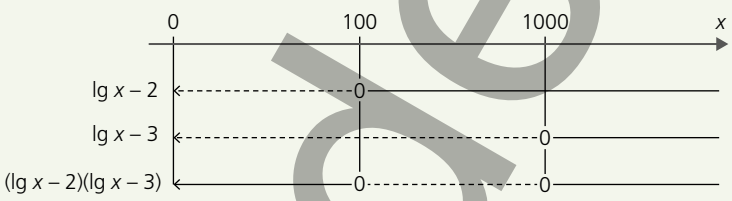
$$\lg x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1}$$

$$\lg x = \frac{5 \pm 1}{2}$$

$$\lg x = 2 \quad \vee \quad \lg x = 3$$

Ulikheten kan altså omformes til $(\lg x - 2)(\lg x - 3) > 0$.

Vi lager fortegnsskjema, og husker på at $\lg x$ er definert for $x > 0$.



Vi er ute etter de x-verdiene som gjør venstresiden positiv.
Vi får derfor at $x \in \langle 0\,, 100\rangle \cup \langle 1000\,, \rightarrow\rangle$.

7.43
Løs ulikhetene.

a $\lg x > 2$
b $\lg x < 2$
c $\ln x > \ln 2$
d $2\lg x - 1 \geq \lg x + 2$
e $\lg(3x - 2) < 1$

7.44
Løs ulikhetene.

a $(\lg x)^2 - 5\lg x + 6 \leq 0$
b $(\ln x)^2 - 5\ln x + 6 \geq 0$
c $(\lg x)^2 - 2\lg x - 3 \geq 0$
d $(\lg x)^2 - 2\lg x > 0$

Tilvurdering

Eksponentiallikninger

I en eksponentiallikning inngår den ukjente i en eksponent.

I kapittel 4 løste vi eksponentiallikninger ved å skrive høyre og venstre side av likningen som potenser med samme grunntall. Det er ikke alltid så lett, og vi skal nå bruke logaritmer til å løse slike likninger.

EKSEMPEL 15

Løs likningen $2^x = 7$.

Alternativ 1:

$$2^x = 7$$
$$\lg 2^x = \lg 7$$
$$x \lg 2 = \lg 7$$
$$x = \frac{\lg 7}{\lg 2}$$

Når venstre og høyre side er like, er også logaritmene av dem like.

Alternativ 2:

$$2^x = 7$$
$$\ln 2^x = \ln 7$$
$$x \ln 2 = \ln 7$$
$$x = \frac{\ln 7}{\ln 2}$$

UTFORSK

Bruk sammenhengen mellom briggske og naturlige logaritmer på side 148 til å vise at svarene i eksempel 15 er identiske.

Eksempel 15 viser at vi kan velge hvilken type logaritme vi vil bruke.
Er grunntallet 10 eller e, er det en fordel å bruke den tilhørende logaritmen.

Når b er et positivt tall, gjelder:

$$10^x = b \Leftrightarrow x = \lg b \qquad e^x = b \Leftrightarrow x = \ln b$$

EKSEMPEL 16

Løs likningen $10^{3x} = 7$.

$$10^{3x} = 7$$
$$3x = \lg 7$$
$$x = \frac{\lg 7}{3}$$

Tilvurdering

7.45
Løs likningene.

a $e^x = 4$ **b** $10^x = 6$ **c** $3^x = 2$ **d** $10^{3x} = 6$

7.46
Løs likningene.

a $10^{3x} = 8$ **b** $e^{x^2} = 5$ **c** $4^{x+1} = 7$ **d** $5 \cdot e^{3x} - 9 = 1$

EKSEMPEL 17

Løs likningen $10^{2x} - 2 \cdot 10^x = 0$.

$$10^{2x} - 2 \cdot 10^x = 0$$
$$(10^x)^2 - 2 \cdot 10^x = 0$$
$$10^x \cdot (10^x - 2) = 0$$

Vi setter felles faktor utenfor parentes.

$$10^x = 0 \quad \vee \quad 10^x - 2 = 0$$

Produktregelen

$$10^x = 2$$

Siden $10^x > 0$ for alle x, gir ikke $10^x = 0$ noen løsning.

$$x = \lg 2$$

Merk!
Vi kan løse likningen ovenfor med *abc*-formelen, der $a = 1$, $b = -2$ og $c = 0$. Siden $c = 0$, er det likevel enklest å bruke produktregelen.

EKSEMPEL 18

Løs likningen $e^x - 6e^{-x} - 1 = 0$.

$$e^x - 6e^{-x} - 1 = 0$$
$$e^x - \frac{6}{e^x} - 1 = 0$$
$$\left(e^x - \frac{6}{e^x} - 1\right) \cdot e^x = 0 \cdot e^x$$

Vi multipliserer begge sider med e^x.

$$(e^x)^2 - 6 - e^x = 0$$
$$(e^x)^2 - e^x - 6 = 0$$
$$e^x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1}$$

abc-formelen med e^x som ukjent

$$e^x = \frac{1 \pm 5}{2}$$
$$e^x = 3 \quad \vee \quad e^x = -2$$

Siden $e^x > 0$ for alle x, gir ikke $e^x = -2$ noen løsning.

$$x = \ln 3$$

Til vurdering

7.47

Løs likningene.

a $10^{2x} - 3 \cdot 10^{x} = 0$

b $3 \cdot e^{x} - 2 \cdot e^{2x} = 0$

c $3^{2x} - 5 \cdot 3^{x} = 0$

7.48

Løs likningene.

a $10^{2x} - 2 \cdot 10^{x} - 8 = 0$

b $3^{2x} - 2 \cdot 3^{x} - 3 = 0$

c $e^{x} + 1 = 2e^{-x}$

SNAKK

Anneli skal løse ulikheten $\left(\frac{1}{3}\right)^{x} > 2$.

Hun gjør slik:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x} > 2$$

$$x < \frac{\ln 2}{\ln \frac{1}{3}}$$

$$x < \frac{\ln 2}{\ln 1 - \ln 3}$$

$$x < -\frac{\ln 2}{\ln 3}$$

Altså er $x \in \left\langle \leftarrow, -\frac{\ln 2}{\ln 3} \right\rangle$.

Forklar hva Anneli har gjort.

7.49

Løs ulikhetene.

a $2^{x} > 3$ **b** $\left(\frac{1}{3}\right)^{x} \leq \left(\frac{1}{9}\right)$ **c** $\left(\frac{1}{5}\right)^{x} < 3$

7.50

Løs ulikhetene.

a $e^{2x} - e^{x} > 0$ **b** $10^{2x} - 3 \cdot 10^{x} + 2 < 0$

Tilvurdering

RØDE OPPGAVER

7.51
Løs likningene.
a $\lg x = 3$ **b** $\lg 2x = 4$ **c** $e^x = 3$ **d** $2^x = \sqrt{2}$

7.52
Løs likningene.
a $\ln(x-2) = 2$ **b** $4^{3x} + 7 = 23$ **c** $e^{2x} - 2e^x = 0$ **d** $10^{2x} + 10^x - 6 = 0$

7.53
Løs likningene.
a $\lg x^2 = 2$ **b** $\ln x^3 - \ln x = 8$ **c** $5^{x^2 - 4x + 5} = 25$ **d** $\lg x + \lg(x+3) = 1$

7.54
I en kommune er folketallet i begynnelsen av et år 13 500. Ifølge en prognose vil det vokse med 2,5 % i året en del år framover. La x være tiden (målt i år) det tar før folketallet er 15 000.
a Sett opp en likning som du kan bruke til å bestemme x.
b Løs likningen.

BLÅ OPPGAVER

7.55
«Hvis $\lg x^2$ er 2, må jo x være lik 10!»
«Er du sikker?»
«Ja, for jeg vet jo at $\lg x^2$ er 2 når x er 10.»
Kommenter samtalen ovenfor.

7.56
Løs likningene.
a $2\lg(2x-5) = \lg 4 + \lg x^2$ **b** $(5 - 2^x)(2^{2x} - 4) = 0$
c $\ln(x+2) + \ln(x-2) = \ln 21$ **d** $e^{2x} - e^{x+1} = 0$

7.57 (Eksamen Forkurset 2020)
Løs likningen $\ln x - \ln(x^2 - x) = 1$.

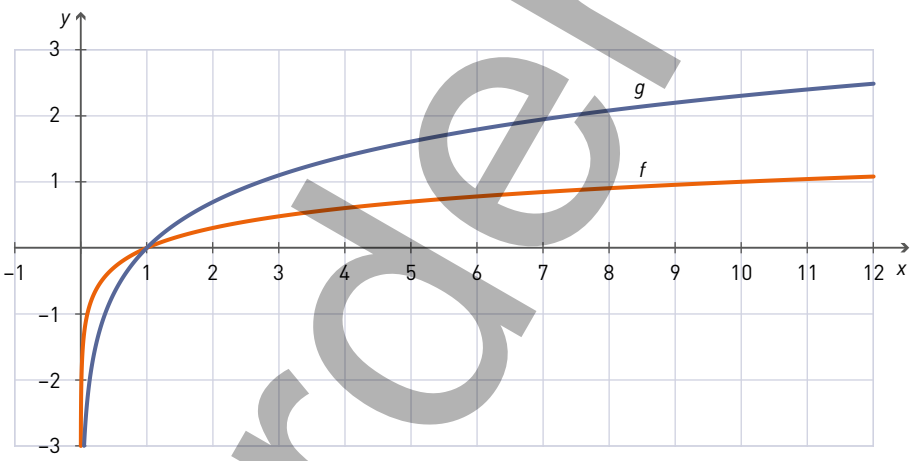
7.58
En pasient får en injeksjon av en medisin i blodet. Konsentrasjonen av medisin i kroppen rett etter injeksjonen er 3,00 mg/mL. Etter 12 minutter har konsentrasjonen minket eksponentielt til 2,35 mg/mL.
a Hvor mange prosent avtar konsentrasjonen med per minutt?
b Hvor lang tid tar det før konsentrasjonen er 0,80 mg/mL?

Tilvurdering

7D Logaritmefunksjoner

Til enhver eksponentialfunksjon a^x svarer det en logaritmefunksjon. Vi skal her begrense oss til den briggske logaritmefunksjonen lg x og den naturlige logaritmefunksjonen ln x.

På figuren ser du grafene til $f(x) = \lg x$ og $g(x) = \ln x$.



Nullpunktet er 1 og definisjonsmengden er $\langle 0, \rightarrow \rangle$ for både f og g.

Når x går mot 0 ovenfra, går funksjonsverdiene mot minus uendelig.

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to 0^+} g(x) = -\infty$$

Derfor er $x = 0$ en vertikal asymptote for grafene til f og g.

Når x går mot uendelig, går funksjonsverdiene mot uendelig.

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty \qquad \lim_{x \to \infty} g(x) = \infty$$

Verdimengden til både f og g er $\mathbb{R}$.

Logaritmefunksjoner er kontinuerlige funksjoner.

SNAKK

Kan du forklare hvorfor den briggske logaritmefunksjonen vokser saktere mot uendelig enn den naturlige logaritmefunksjonen?

Tilvurdering

EKSEMPEL 19

a Skisser grafen til funksjonen f gitt ved $f(x) = 2\lg(x+3)$ når du får vite at $\lg 2 \approx 0{,}3$.

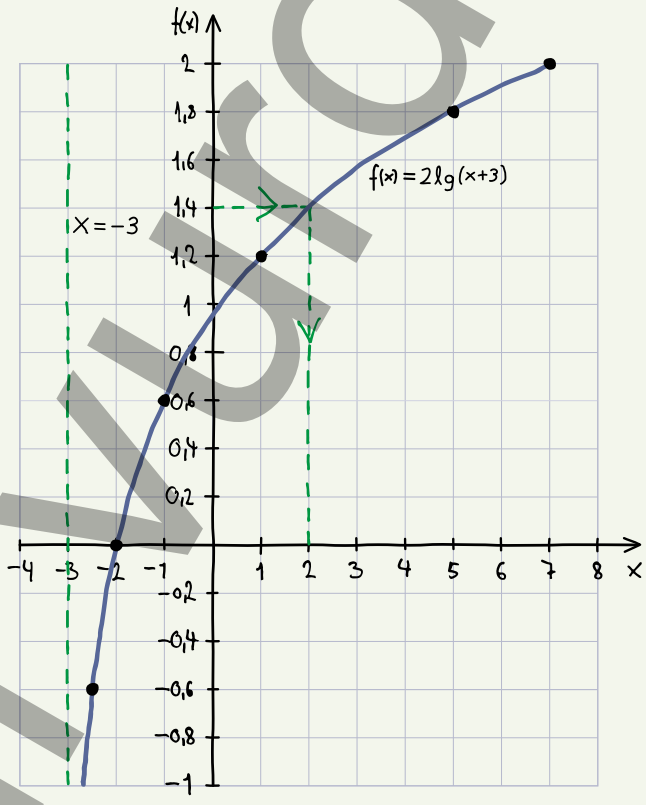
b Løs ulikheten $2\lg(x+3) \leq 1{,}4$ grafisk.

a $x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3$

$$\lim_{x \to -3^+} f(x) = \lim_{x \to -3^+} 2\lg(x+3) = -\infty$$

Derfor er $x = -3$ en vertikal asymptote for grafen til f.
Videre regner vi ut en del funksjonsverdier:

$$f(-2{,}5) = 2\lg 0{,}5 = 2\lg 2^{-1} = -2\lg 2 \approx -0{,}6$$
$$f(-2) = 2\lg 1 = 0$$
$$f(-1) = 2\lg 2 \approx 0{,}6$$
$$f(1) = 2\lg 4 = 2\lg 2^2 = 4\lg 2 \approx 1{,}2$$
$$f(5) = 2\lg 8 = 2\lg 2^3 = 6\lg 2 \approx 1{,}8$$
$$f(7) = 2\lg 10 = 2$$



b Vi leser av grafen at x er 2,0 når funksjonsverdien er 1,4.
Vi ser videre at funksjonsverdien er mindre enn 1,4 når x er mindre enn 2,0. Vi må også ta hensyn til at $D_f = \langle -3{,}0\,, \rightarrow \rangle$.
Altså er $x \in \langle -3{,}0\,, 2{,}0 \rangle$.

Tilvurdering

7.59

Funksjonen f er gitt ved $f(x) = 5\lg(2x - 4)$.

a Bestem definisjonsmengden, verdimengden og den vertikale asymptoten til f.

b Skriv av tabellen nedenfor og fyll den ut ved å bruke at $\lg 2 \approx 0{,}3$.

x	2,25	2,5	3	4	6	7	10
$f(x)$							

c Skisser grafen til f.

d Løs ulikheten $5\lg(2x - 4) \leq 4{,}5$ grafisk.

7.60

Funksjonen g er gitt ved $g(x) = 10\ln(x + 1)$.

a Bestem definisjonsmengden, verdimengden og den vertikale asymptoten til f.

b Skriv av tabellen nedenfor og fyll den ut ved å bruke at $\ln 2 \approx 0{,}7$ og $\ln 3 \approx 1{,}1$.

x	–0,5	0	0,5	1	2	3	7	8
$f(x)$								

c Skisser grafen til g.

d Løs ulikheten $10\ln(x + 1) \leq 5$ grafisk.

7.61

Prisen $p(t)$ i kroner for en bestemt aksje t måneder etter at den ble kjøpt er gitt ved $p(t) = 7{,}5\ln(32{,}5t - 0{,}95t^2)$.

a Tegn grafen til p med Geogebra.

b Angi en rimelig definisjonsmengde for p.

c Når var prisen for aksjen 30 kr?

d Hvor lenge holdt prisen seg over 40 kr?

7.62

Temperaturen i en stekeovn t minutter etter at den blir påslått er gitt ved $T(t) = 15 + 160 \cdot \lg(7t)$. $T(t)$ har enheten °C.

a Hva er temperaturen i ovnen en halv time etter at den blir påslått?

b Hvor lang tid tar det før temperaturen er 500 °C?

Til vurdering

RØDE OPPGAVER

7.63

En funksjon f er gitt ved $f(x) = \lg x - 2$.

a Finn definisjonsmengden og verdimengden til f.

b Skisser grafen til f.

c Er f kontinuerlig?

d Finn nullpunktet til f.

e Løs likningen $\lg x - 2 = 1$ grafisk og ved regning.

7.64

Funksjonen f er gitt ved $f(x) = \lg(x+1)$.

a Hva er definisjonsmengden og verdimengden til f?

b Finn den vertikale asymptoten til f.

c Skriv av og fyll ut verditabellen nedenfor når du får oppgitt at $\lg 2 \approx 0{,}30$.

x	−0,5	0	1	3	7	9
$f(x)$						

d Bruk verditabellen og skisser grafen til f.

7.65

pH, et mål for surheten i en kjemisk løsning, er gitt ved funksjonen p:

$$p(h) = -\lg h$$

der h er konsentrasjon av H_3O^+-ioner i mol/L.

a Hva er pH i en løsning der konsentrasjonen av H_3O^+-ioner er 0,01 mol/L?

b pH i en løsning er 8. Hva er konsentrasjonen av H_3O^+-ioner i løsningen?

BLÅ OPPGAVER

7.66

a Tegn grafene til funksjonene f og g gitt ved $f(x) = \ln(3-x)$ og $g(x) = \ln(x-5)$

b Forklar at likningen $\ln(3-x) = \ln(5-x)$ ikke har noen løsning.

Da Per løste likningen i oppgave b ved regning, ga han svaret $x = 4$.

c Hva har Per gjort galt?

7.67

Bestem grenseverdiene hvis de eksisterer.

a $\lim\limits_{x\to\infty} \lg(x-3)$ **b** $\lim\limits_{x\to 10} \dfrac{\lg x - 1}{(\lg x)^2 - 1}$ **c** $\lim\limits_{x\to e} \dfrac{\ln x - 1}{(\ln x)^2 - 1}$ **d** $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x - 1}{(\ln x)^2 - 1}$

Til vurdering

7E Generelle logaritmer

Vi kan generelt definere logaritmen til et tall slik:

La p og n være positive tall der $n \neq 1$.

$\log_n p$ er det tallet vi må opphøye n i for at svaret skal bli p:

$$n^{\log_n p} = p$$

SNAKK

a Hvorfor er $\log_n 1 = 0$ og $\log_n n = 1$?
b Forklar at $\log_2 2^k = k$ og $\log_n n^k = k$.

EKSEMPEL 20

Bestem

a $2^{\log_2 3}$ **b** $\log_2 16$ **c** $\log_3 \frac{1}{9}$ **d** $\log_4 2$

a $2^{\log_2 3} = 3$ $\quad 2^{\log_2 p} = p$

b Vi skriver først 16 som potens med 2 som grunntall: $16 = 2^4$.

$\log_2 16 = \log_2 2^4 = 4$ $\quad \log_2 2^k = k$

c Vi skriver først $\frac{1}{9}$ som potens med 3 som grunntall: $\frac{1}{9} = \frac{1}{3^2} = 3^{-2}$.

$\log_3 \frac{1}{9} = \log_3 3^{-2} = -2$ $\quad \log_3 3^k = k$

d Vi skriver først 2 som potens med 4 som grunntall: $2 = \sqrt{4} = 4^{\frac{1}{2}}$.

$\log_4 2 = \log_4 4^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$ $\quad \log_4 4^k = k$

Til vurdering

Programmet nedenfor beregner $\log_2 16$.

```
from pylab import *

print(math.log(16, 2))
```

Utskriften ser slik ut:

```
4.0
```

Merk!

I programkoden ovenfor viser tallet etter kommaet hvilket grunntall vi bruker for å beregne logaritmen. Legg også merke til at vi må bruke kommandoen **math** for å beregne generelle logaritmer på denne måten.

7.68

Regn ut.

a $6^{\log_6 9}$ **b** $4^{\log_4 0{,}7}$ **c** $\log_3 27$ **d** $\log_5 \frac{1}{125}$ **e** $\log_5 \sqrt{5}$

7.69

Lag et program som regner ut logaritmene.

a $\log_2 7$ **b** $\log_3 4$ **c** $\log_7 45$

Logaritmesetningene

De generelle logaritmesetningene gjelder for alle positive grunntall forskjellig fra 1.

La a, b og n være positive tall der n er forskjellig fra 1. Da har vi

1. $\log_n ab = \log_n a + \log_n b$
2. $\log_n \frac{a}{b} = \log_n a - \log_n b$
3. $\log_n a^b = b \cdot \log_n a$

Merk!

Tredje logaritmesetning gjelder for alle verdier av b.

Tilvurdering

EKSEMPEL 21

Skriv uttrykket $\log_2\left(\frac{2}{a^3}\right)-\log_2(8a)$ så enkelt som mulig.

$$\log_2\left(\frac{2}{a^3}\right)-\log_2(8a)=\log_2 2-\log_2 a^3-\left(\log_2 2^3+\log_2 a\right)$$ Første og andre logaritmesetning

$$=1-3\log_2 a-3-\log_2 a$$ $\log_2 2^k = k$ og tredje logaritmesetning

$$=-2-4\log_2 a$$

7.70

Bruk logaritmesetningene til å forenkle uttrykkene.

a $\log_2 x^2-\log_2 x$ **b** $\log_2 ab-\log_2 2a$ **c** $\log_2 2x+\log_2\left(\frac{4}{x}\right)$

7.71

Bruk logaritmesetningene til å forenkle uttrykkene.

a $\log_5\left(\frac{25}{x^2}\right)+\log_5 5x^3$ **b** $\log_3\left(\frac{3a}{b}\right)+\log_3\left(\frac{9}{ab^{-2}}\right)$

Likninger

Når n er et positivt tall forskjellig fra 1 og b er et positivt tall gjelder følgende:

$$\log_n x = a \Leftrightarrow x = n^a \qquad n^x = b \Leftrightarrow x = \log_n b$$

EKSEMPEL 22

Løs likningene.

a $\log_5 3x = 2$ **b** $2^x = 7$

a

$$\log_5 3x = 2$$
$$3x = 5^2$$
$$x = \frac{25}{3}$$

b

$$2^x = 7$$
$$x = \log_2 7$$

Tilvurdering

Løsningen på likningen $2^x = 7$ i eksempel 22 er gitt med en 2-logaritme. Vi løste den samme likningen i eksempel 15. Løsningene må være like, så det må bety at $\log_2 7 = \frac{\lg 7}{\lg 2} = \frac{\ln 7}{\ln 2}$.

Dette gjelder generelt.

La x være et positivt tall og n være et positivt tall forskjellig fra 1. Da er

$$\log_n x = \frac{\lg x}{\lg n} = \frac{\ln x}{\ln n}$$

Vi oppgir vanligvis løsninger med briggske eller naturlige logaritmer.

SNAKK

Arif, Julie og Ludvig skal løse likningen $2^x = 16$.
De har hver sin strategi.

Arif:
$2^x = 16$
$2^x = 2^4$
$x = 4$

Julie:
$2^x = 16$
$\lg 2^x = \lg 16$
$x \lg 2 = \lg 16$
$x = \frac{\lg 2^4}{\lg 2}$
$x = \frac{4 \lg 2}{\lg 2}$
$x = 4$

Ludvig:
$2^x = 16$
$x = \log_2 16$
$x = 4$

Forklar hver av framgangsmåtene trinn for trinn.

7.72
Løs likningene.

a $\log_2 x = 3$ **b** $\log_3 (x - 2) = 2$ **c** $\log_4 x^2 = 2$ **d** $(\log_2 x)^2 = 16$

Tilvurdering

RØDE OPPGAVER

7.73
Skriv så enkelt som mulig.

a $\log_3 3^7$ **b** $5^{\log_5 2}$ **c** $\log_2 2^3 - \log_3 3^2$ **d** $\lg 100 - \log_3 1$

7.74
Bruk logaritmesetningene til å forenkle uttrykkene.

a $\log_2 ab - \log_2 \frac{a}{b}$ **b** $\log_3 3a + \log_3 \frac{9}{a^2}$ **c** $\log_4 a^4 - \log_4 \frac{a^3}{16}$

7.75
Løs likningene.

a $5\log_3 x = 20$ **b** $12\log_5 2x - 4 = 20$ **c** $(\log_7 x)^2 = 4$

BLÅ OPPGAVER

7.76
Skriv så enkelt som mulig.

a $\log_4 16^x$ **b** $\log_3 \frac{1}{81}$ **c** $\log_2 \sqrt[3]{2^5}$ **d** $\log_2 12 - \log_2 3$

7.77
Løs likningene.

a $\log_2 x^2 - \log_2 x = 4$ **b** $(\log_2 x)^2 - 2\log_2 x = 3$ **c** $\log_3 x \cdot (\log_3 x - \log_3 2) = 0$

7.78
Skriv 1,35 med

a 2 som grunntall **b** 5 som grunntall

7.79
I denne oppgaven skal vi bestemme x slik at følgende likning stemmer: $\frac{1}{\log_2 x} + \frac{1}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_4 x} = 1$

Vi har følgende regel:
«n-logaritmen til et tall a kan vi skrive som g-logaritmen til tallet dividert med g-logaritmen til n, der g er et valgfritt grunntall ($g > 0$ og $g \neq 1$). Skrevet med symboler: $\log_n a = \frac{\log_g a}{\log_g n}$.»

a Vis at $\log_x b = \frac{1}{\log_b x}$ ved å bruke regelen ovenfor.

b Bruk resultatet i oppgave a til å vise at vi kan skrive likningen på formen: $\log_x 2 + \log_x 3 + \log_x 4 = 1$.

c Skriv uttrykket på venstre side i likningen enklere og bestem x.

Til vurdering

SAMMENDRAG

Logaritmer

Briggske:	$10^{\lg p} = p$	$\lg 10^k = k$	$\lg 10 = 1$	$\lg 1 = 0$
Naturlige:	$e^{\ln p} = p$	$\ln e^k = k$	$\ln e = 1$	$\ln 1 = 0$
Generelle:	$n^{\log_n p} = p$	$\log_n n^k = k$	$\log_n n = 1$	$\log_n 1 = 0$

Logaritmesetningene

1	$\lg ab = \lg a + \lg b$	$\ln ab = \ln a + \ln b$	$\log_n ab = \log_n a + \log_n b$
2	$\lg \frac{a}{b} = \lg a - \lg b$	$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$	$\log_n \frac{a}{b} = \log_n a - \log_n b$
3	$\lg a^b = b \cdot \lg a$	$\ln a^b = b \cdot \ln a$	$\log_n a^b = b \cdot \log_n a$

Sammenhenger mellom logaritmer

$$\lg x = \frac{\ln x}{\ln 10} \qquad \log_n x = \frac{\ln x}{\ln n} = \frac{\lg x}{\lg n}$$

Likninger

$$\lg x = a \Leftrightarrow x = 10^a \qquad \ln x = a \Leftrightarrow x = e^a \qquad \log_n x = a \Leftrightarrow x = n^a$$

$$10^x = b \Leftrightarrow x = \lg b \qquad e^x = b \Leftrightarrow x = \ln b \qquad n^x = b \Leftrightarrow x = \log_n b$$

Til vurdering