6

Grenseverdier og kontinuitet

KAPITTELINNHOLD

6A Grenseverdier *106*
6B Eulertallet og eksponentialfunksjoner *118*
6C Kontinuitet *122*
6D Asymptoter *126*

Mange har opplevd en forelesning som varer «uendelig» lenge, og latt tankene vandre til stjerner og planeter «uendelig» langt unna.

Begrepet *uendelig* har alltid fascinert menneskene, og særlig matematikerne blant oss.

Symbolet for uendelighet er ∞. Dette «liggende 8-tallet» kaller vi *lemniskate*, som er latin for sløyfe.

Til vurdering

6A Grenseverdier

La f være funksjonen gitt ved $f(x) = \frac{3(x^2-4)}{x-2}$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Tallet 2 er ikke med i definisjonsmengden, men hva skjer med funksjonsverdien når x nærmer seg 2?
Vi regner ut funksjonsverdien for to tall som er svært nær 2:

$$f(2{,}00001) = \frac{3(2{,}00001^2-4)}{2{,}00001-2} = 12{,}00003$$

$$f(1{,}99999) = \frac{3(1{,}99999^2-4)}{1{,}99999-2} = 11{,}99997$$

Det kan se ut til at $f(x)$ nærmer seg 12 når x nærmer seg 2.

Vi sier at «$f(x)$ går mot 12 når x går mot 2», som vi kan skrive slik:

$$f(x) \to 12 \text{ når } x \to 2$$

La f være en funksjon som er definert i nærheten av a (f trenger ikke være definert i a, men kan være det).

Vi sier at «grenseverdien til $f(x)$ når x går mot a, er lik b» hvis vi kan få $f(x)$ så nær b vi vil ved å velge x nær nok a, men ikke lik a.

Vi skriver denne grenseverdien slik:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

«lim» er forkortelse for det latinske ordet «limes», og betyr grense.

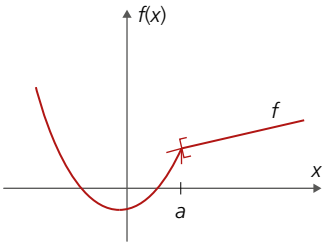
Det viser seg at grenseverdien til uttrykket $\frac{3(x^2-4)}{x-2}$ er lik 12 når x går mot 2, det vil si at

$$\lim_{x \to 2} \frac{3(x^2-4)}{x-2} = 12$$

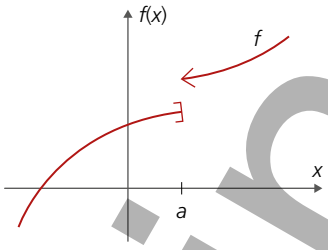
Vi kan altså få uttrykket $\frac{3(x^2-4)}{x-2}$ så nær 12 vi vil ved å velge x nær nok 2.

Til vurdering

En grenseverdi kan eksistere eller ikke eksistere:



Grenseverdien til $f(x)$
når x går mot a eksisterer.



Grenseverdien til $f(x)$
når x går mot a eksisterer ikke.

En grenseverdi eksisterer når den er lik et tall.

Nedenfor lister vi opp noen resultater for grenseverdier. Her er a og k reelle tall, og f og g funksjoner definert i nærheten av a. Det er også en forutsetning at grenseverdiene $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ og $\lim\limits_{x \to a} g(x)$ eksisterer.

- $\lim\limits_{x \to a} k = k$
- $\lim\limits_{x \to a} x = a$
- $\lim\limits_{x \to a} (f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) + \lim\limits_{x \to a} g(x)$
- $\lim\limits_{x \to a} (f(x) - g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) - \lim\limits_{x \to a} g(x)$
- $\lim\limits_{x \to a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x)$
- $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$ hvis $\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0$

I praksis kan vi forsøke å sette verdien som x går mot, inn i det aktuelle uttrykket. Hvis vi da får et tallsvar, er dette grenseverdien. Se eksempel 1 på neste side.

Hvis både telleren og nevneren i et brøkuttrykk går mot 0, er grenseverdien et «0/0-uttrykk». Da kan vi faktorisere og forkorte, før vi setter inn verdien som x går mot. Se eksempel 2 på neste side.

Tilvurdering

EKSEMPEL 1

Finn $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x+5}{2x}$.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x+5}{2x} = \frac{1+5}{2 \cdot 1} = 3$$

EKSEMPEL 2

Finn $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3(x^2-4)}{x-2}$.

Når x går mot 2, går både telleren og nevneren mot 0.
Da vet vi at $x-2$ er en felles faktor for telleren og nevneren.
Vi faktoriserer og forkorter.

$$\frac{3(x^2-4)}{x-2} = \frac{3(x-2)(x+2)}{x-2} = 3(x+2) = 3x+6 \quad \text{når} \quad x \neq 2$$

Det gir

$$\lim_{x \to 2} \frac{3(x^2-4)}{x-2} = \lim_{x \to 2} (3x+6) = 3 \cdot 2 + 6 = 12$$

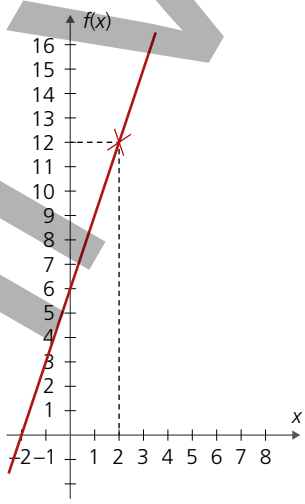
Eksemplet viser at funksjonen gitt ved

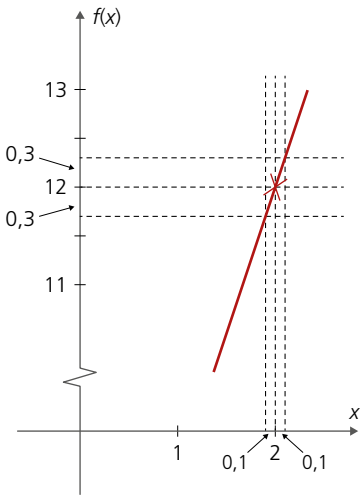
$$f(x) = \frac{3(x^2-4)}{x-2}$$

kan forenkles til

$$f(x) = 3x+6\,, \quad x \neq 2$$

Grafen til f er derfor den rette linja gitt ved $y = 3x + 6$, bortsett fra at punktet (2 , 12) mangler. På grafen til f kan vi markere det med to spissparenteser som møtes.





Tilvurdering

6.1
La f være funksjonen gitt ved $f(x) = \dfrac{x^2 - 25}{x - 5}$.

a Finn $\lim\limits_{x \to 7} f(x)$.

b Vis at vi kan forenkle til $f(x) = x + 5$ når $x \neq 5$.

c Bruk resultatet i oppgave b til å finne $\lim\limits_{x \to 5} f(x)$.

6.2
La g være funksjonen gitt ved $g(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$.

a Skriv av og fyll ut tabellen.

x	2,99	2,999	2,9999	3	3,0001	3,001	3,01
$g(x)$				Ikke def.			

b Hva skjer med funksjonsverdiene når x nærmer seg 3?

c Bekreft observasjonen i oppgave b ved å finne $\lim\limits_{x \to 3} g(x)$.

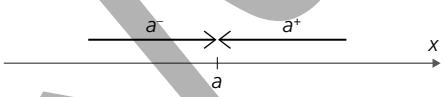
6.3
Regn ut grenseverdiene.

a $\lim\limits_{x \to 2} (4x - 1)$ **b** $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x - 1}{3x}$ **c** $\lim\limits_{x \to 1} (x^2 - 1)$

d $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{4(x - 1)}$ **e** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{x^2 - x}$ **f** $\lim\limits_{x \to -4} \dfrac{x^2 - 16}{2x + 8}$

Ensidige grenseverdier

Variabelen x ligger på tallinja og kan nærme seg et tall a fra to sider:



Hvis x nærmer seg a og er større enn a, sier vi at «x går mot a ovenfra».
Vi skriver $x \to a^+$.
Hvis x nærmer seg a og er mindre enn a, sier vi at «x går mot a nedenfra».
Vi skriver $x \to a^-$.

Når vi ser på grenseverdien til et uttrykk $f(x)$ der x går mot a ovenfra eller nedenfra, ser vi på *ensidige* grenseverdier. Vi skriver

$$\lim_{x \to a^+} f(x) \quad \text{og} \quad \lim_{x \to a^-} f(x)$$

Når vi skriver $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, betyr det at x skal gå mot a både ovenfra og nedenfra.

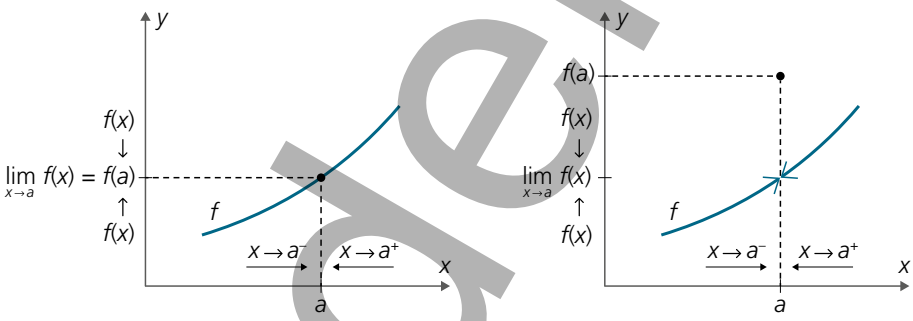
Tilvurdering

Grenseverdien $\lim\limits_{x \to a} f(x)$

- **eksisterer hvis $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x)$**
- **eksisterer ikke hvis $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to a^-} f(x)$**

Hvis en funksjon f er definert i punktet a og grenseverdien $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ eksisterer, har vi to muligheter:

❶ Grenseverdien er lik $f(a)$, som i figuren til venstre nedenfor.
❷ Grenseverdien er ikke lik $f(a)$, som i figuren til høyre nedenfor.



EKSEMPEL 3

La u være funksjonen gitt ved

$$u(x) = \begin{cases} 2x & \text{for } x < 0 \\ 1 & \text{for } x > 0 \end{cases}$$

Undersøk om grenseverdien $\lim\limits_{x \to 0} u(x)$ eksisterer.

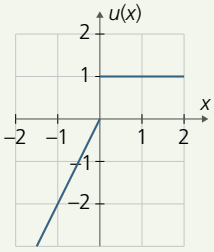
Når x nærmer seg 0 nedenfra, er funksjonsuttrykket $2x$. Det gir

$$\lim_{x \to 0^-} u(x) = \lim_{x \to 0^-} 2x = 2 \cdot 0 = 0$$

Når x nærmer seg 0 ovenfra, er funksjonsuttrykket konstant lik 1. Det gir

$$\lim_{x \to 0^+} u(x) = \lim_{x \to 0^+} 1 = 1$$

De ensidige grenseverdiene er forskjellige.
Derfor eksisterer ikke $\lim\limits_{x \to 0} u(x)$.
Vi ser det samme ved å tegne grafen til u:



Tilvurdering

Hvis f er absoluttverdifunksjonen, har vi at

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{for } x\geq 0 \\ -x & \text{for } x<0 \end{cases}$$

Det gir $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} x=0$ og $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(-x)$, så de ensidige grenseverdiene er like. Vi har derfor at

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}|x|=0$$

6.4

Undersøk om grenseverdiene i bruddpunktene eksisterer.

a $f(x)=\begin{cases} 2x & \text{for } x\leq 0 \\ x & \text{for } x>0 \end{cases}$

b $g(x)=\begin{cases} 4x-1 & \text{for } x\leq 0 \\ 0 & \text{for } x>0 \end{cases}$

c $h(x)=\begin{cases} 2x+1 & \text{for } x<-1 \\ -x^2 & \text{for } x>-1 \end{cases}$

Uendelig og grenseverdier

Vi tar for oss funksjonen f gitt ved $f(x)=\dfrac{1}{x}$.

Vi kan sette inn alle tall unntatt 0 i funksjonsuttrykket, så $D_f=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.
Vi setter inn noen verdier nær 0 for å se hva som skjer:

$$f(0{,}001)=\frac{1}{0{,}001}=1000$$

$$f(0{,}000\,01)=\frac{1}{0{,}000\,01}=100\,000$$

Vi ser at $f(x)$ blir større og større når x nærmer seg 0 ovenfra.

I slike tilfeller eksisterer ikke grenseverdien, men vi sier at «grenseverdien er uendelig». Symbolet for uendelig er ∞, og

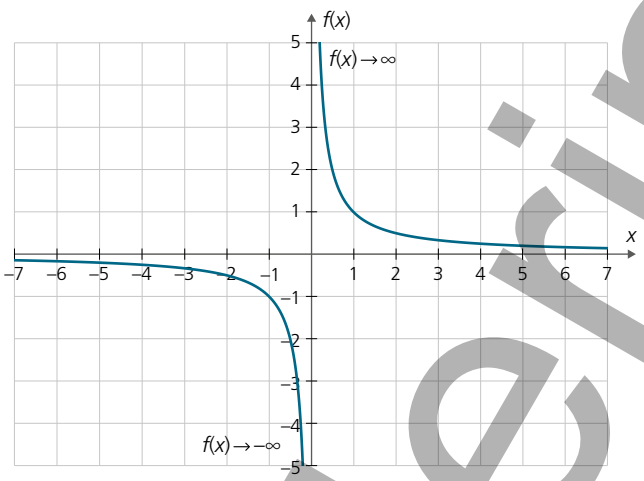
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=\infty$$

er en skrivemåte for at $f(x)\to\infty$ når $x\to 0^+$.

Til vurdering

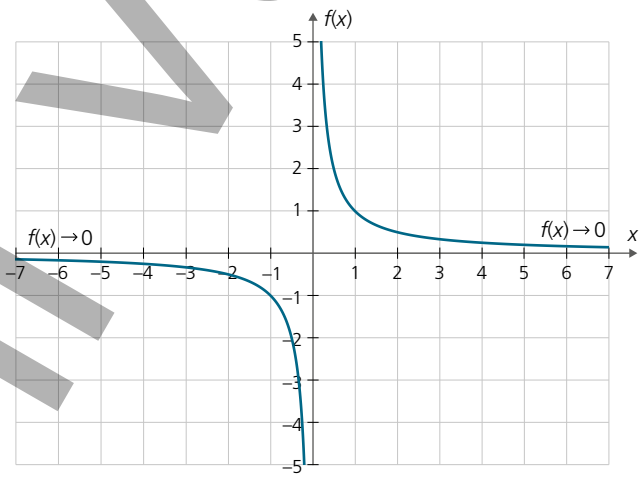
Når x nærmer seg 0 nedenfra, er x negativ. Det gjør at $f(x)$ blir et negativt tall med større og større absoluttverdi. Vi skriver

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$



- $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ vil si at vi kan få $f(x)$ så stor vi vil ved å velge x nær nok a, men ikke lik a.
- $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ vil si at vi kan få $f(x)$ så stor vi vil i absoluttverdi, men med negativt fortegn, ved å velge x nær nok a, men ikke lik a.

Vi kan også være interessert i å finne ut hva som skjer med $f(x)$ når x blir større og større i absoluttverdi. Vi sier gjerne «når x går mot uendelig» eller «når x går mot minus uendelig», og skriver henholdsvis $x \to \infty$ eller $x \to -\infty$.



Tilvurdering

Nederst på forrige side har vi tegnet grafen til f gitt ved $f(x) = \frac{1}{x}$ på nytt.

Vi ser at grafen nærmer seg x-aksen (linja $y = 0$) når $x \to \infty$ og når $x \to -\infty$. Når x går mot uendelig, vil altså $f(x)$ bli mindre og mindre, og nærme seg 0. Det samme skjer når x går mot minus uendelig. Vi har derfor

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{og} \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Generelt:

- $\lim_{x \to \infty} f(x) = b$ vil si at vi kan få $f(x)$ så nær b vi vil ved å velge x stor nok.
- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$ vil si at vi kan få $f(x)$ så nær b vi vil ved å velge x som et negativt tall med stor nok absoluttverdi.

6.5

Finn grenseverdiene.

a $\lim_{x \to \infty} \frac{8}{x}$ **b** $\lim_{x \to 3^+} \frac{1}{x-3}$ **c** $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{1}{x} + 2\right)$

d $\lim_{x \to -\infty} \frac{3}{x}$ **e** $\lim_{x \to \infty} \frac{5}{x^2+2}$ **f** $\lim_{x \to 0^-} \frac{7}{x}$

EKSEMPEL 4

Finn grenseverdien $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2+1}{3x^2-2x-1}$.

Når x går mot uendelig, går både telleren og nevneren mot uendelig. Vi dividerer med høyeste potens av x i både telleren og nevneren. Her er den høyeste potensen av x lik x^2. Det gir

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2+1}{3x^2-2x-1} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2}}{\frac{3x^2}{x^2} - \frac{2x}{x^2} - \frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{3 - \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}}$$

Vi forkorter.

$$= \frac{1+0}{3-0-0}$$

Småbrøkene går mot 0 når x går mot uendelig.

$$= \frac{1}{3}$$

Til vurdering

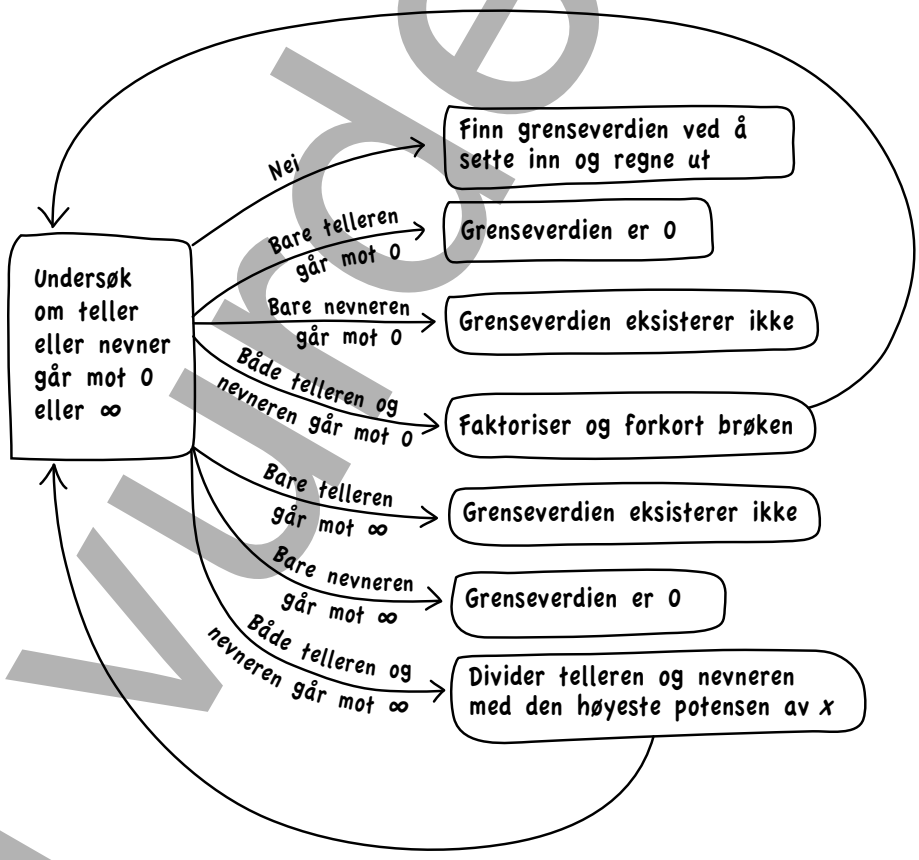
Merk!
Å dividere med høyeste potens av x i både teller og nevner er en metode vi kan bruke når vi skal finne grenseverdien til et brøkuttrykk når x går mot uendelig eller minus uendelig.

6.6
Finn grenseverdiene hvis de eksisterer.

a $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^2+1}{4x^2-3x+1}$ **b** $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x+1}{2x^2+2x}$ **c** $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^2+2x}{x+1}$

Oppsummering

Flytskjemaet nedenfor beskriver en algoritme for å finne grenseverdi for et rasjonalt uttrykk.



Til vurdering

RØDE OPPGAVER

6.7

Bestem grenseverdiene.

a $\lim\limits_{x \to 1} 5$ **b** $\lim\limits_{x \to 1} 2x$ **c** $\lim\limits_{x \to 1+} \frac{1}{x-1}$ **d** $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x-1}$

6.8

Bestem grenseverdiene.

a $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$ **b** $\lim\limits_{x \to -2} \frac{2x+4}{x^2-4}$ **c** $\lim\limits_{x \to 5} \frac{x^2-5x}{x-5}$ **d** $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2+6x}{x}$

6.9

Bestem grenseverdiene hvis de eksisterer.

a $\lim\limits_{x \to 0} \frac{3x^2+5x}{x}$ **b** $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{3x^2+5x}$ **c** $\lim\limits_{x \to 2} \frac{2x^2-4x}{x-2}$ **d** $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^3-3x^2}{x-3}$

6.10

Bestem grenseverdiene hvis de eksisterer.

a $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x}$ **b** $\lim\limits_{x \to \infty} (x-1)$ **c** $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x+3}{x}$ **d** $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x}{x^2+3}$

6.11

Det koster 1000 kr per person å leie en hytte.
I tillegg kommer det et fast beløp på 4000 kr som er uavhengig av antall personer.

a Forklar hva funksjonen p gitt ved $p(x) = 1000 + \frac{4000}{x}$ forteller oss.

b Bestem $\lim\limits_{x \to \infty} p(x)$. Hva forteller svaret?

BLÅ OPPGAVER

6.12

Om funksjonene f og g får du vite at

$$\lim_{x \to 4} f(x) = 2 \quad \text{og} \quad \lim_{x \to 4} g(x) = -1$$

Finn grenseverdiene hvis de eksisterer.

a $\lim\limits_{x \to 4} (f(x) - 3g(x))$ **b** $\lim\limits_{x \to 4} \frac{f(x) \cdot g(x)}{(g(x))^2+1}$ **c** $\lim\limits_{x \to 4} \frac{2-f(x)}{g(x)}$

6.13

Ta for deg funksjonen f gitt ved $f(x) = \frac{81-x^2}{x^2+9x}$.

Bestem grenseverdiene hvis de eksisterer.

a $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ **b** $\lim\limits_{x \to -9} f(x)$ **c** $\lim\limits_{x \to 9} f(x)$ **d** $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ **e** $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

Til vurdering

6B Eulertallet og eksponentialfunksjoner

UTFORSK

Ta utgangspunkt i uttrykket $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

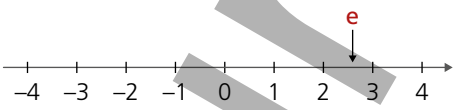
Skriv av og fyll inn i tabellen nedenfor. Bruk minst fem desimaler.

n	10	10^2	10^3	10^6	10^9	10^{12}
$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$						

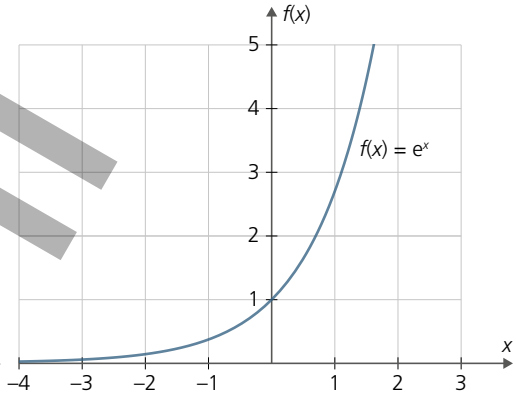
Hva skjer med verdien av uttrykket når n blir svært stor?

Uttrykket $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ vil nærme seg tallet 2,718 281 828 459 … når n blir større og større. Dette tallet er irrasjonalt og har fått symbolet e.

Vi skriver $e = \lim_{n \to \infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.



Det var den sveitsiske matematikeren Leonard Euler (1707–1783) som først brukte symbolet e om dette tallet. Vi kaller derfor tallet *eulertallet*.
Eulertallet dukker ofte opp i naturvitenskapelige modeller. Det er derfor vanlig å bruke eulertallet som grunntall i eksponentialfunksjoner, og funksjonen gitt ved $f(x) = e^x$ kalles ofte den *naturlige* eksponentialfunksjonen. Grafen ser du nedenfor.



Til vurdering

EKSEMPEL 5

La funksjonen f være gitt ved

$$f(x) = e^x,\ D_f = \mathbb{R}$$

Bestem grenseverdiene $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ og $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

Når grunntallet i en potens er større enn 1, vil verdien av potensen bli større jo større eksponenten blir. Siden tallet e er større enn 1, er

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} e^x = \infty$$

For å forstå hva som skjer når $x \to -\infty$, omformer vi funksjonsuttrykket.

$$f(x) = e^x = \frac{1}{e^{-x}}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Når x går mot minus uendelig, vil $-x$ gå mot pluss uendelig.
Og da vil nevneren gå mot pluss uendelig. Altså er

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} e^x = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{e^{-x}} = 0$$

EKSEMPEL 6

Restspenningen (i volt) over en kondensator er gitt ved

$$V(t) = 10 \cdot e^{-0{,}022t}$$

der t er tiden i sekunder etter at vi lukker bryteren.
Finn $\lim\limits_{t \to \infty} V(t)$ og tolk svaret.

Grunntallet i denne ekspontialfunksjonen er $e^{-0{,}022} \approx 0{,}978$.
Når grunntallet i en potens er mellom 0 og 1, vil potensen bli mindre jo større eksponenten blir. Det gir

$$\lim_{t \to \infty} V(t) = \lim_{t \to \infty} \left(10 \cdot e^{-0{,}022t}\right) = 10 \cdot 0 = 0$$

Dette betyr at restspenningen over kondensatoren etter hvert vil avta mot null.

Til vurdering

6.14

Finn grenseverdiene.

a $\lim\limits_{x \to \infty} e^{2x}$ **b** $\lim\limits_{x \to \infty} e^{-x}$ **c** $\lim\limits_{x \to \infty} 2^{x}$ **d** $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{x}$

6.15

Finn grenseverdiene.

a $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{2x}$ **b** $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x}$ **c** $\lim\limits_{x \to -\infty} 2^{x}$ **d** $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{x}$

6.16

Funksjonen v er gitt ved

$$v(x) = 5 \cdot e^{-0{,}255x}$$

En stein som sklir bortover en islagt flate, har farten $v(x)$ m/s i avstanden x m fra startpunktet. Finn $\lim\limits_{x \to \infty} v(x)$ og tolk svaret.

Til vurdering

RØDE OPPGAVER

6.17

Bestem grenseverdiene hvis de eksisterer.

a $\lim\limits_{x \to 0} e^x$ **b** $\lim\limits_{x \to 0} e^{-x}$ **c** $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{e^x}$ **d** $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{e^x}$

6.18

Verdiutviklingen av to kunstverk er gitt ved

$$V_1(t) = 250\,000e^{0,2235t} \text{ og } V_2(t) = 250\,000e^{-0,2235t}$$

Her er t tiden etter 2022 målt i år, og $V_1(t)$ og $V_2(t)$ er verdien av kunstverkene målt i kroner.

a Hva var kunstverkene verdt i 2022?

b Finn $\lim\limits_{t \to \infty} V_1(t)$ og $\lim\limits_{t \to \infty} V_2(t)$.

c Forklar hva svarene i oppgave b forteller oss.

d Skriv funksjonsuttrykkene på formen $V(t) = ka^t$.

e Hvor mange prosent øker eller minker verdien hvert år?

BLÅ OPPGAVER

6.19

Elin baker pepperkaker. Hun steker dem noen minutter ved temperaturen 225 °C.
Idet hun tar dem ut av ovnen, spør hun om Anders vil smake.
Men Anders vil fornuftig nok vente med å smake til temperaturen har kommet ned i 50 °C.
En modell for temperaturutviklingen er gitt ved

$$f(t) = 205e^{-kt} + 20$$

der k er en konstant.
Her er t tiden i minutter etter at kakene kom ut av ovnen og $f(t)$ temperaturen i °C.

a Etter 60 sekunder måler Anders temperaturen til 150 °C. Bestem k.

b Hvor lenge må Anders vente før han kan spise kakene?

c Bestem $\lim\limits_{t \to \infty} f(t)$.

d Hva forteller svaret i oppgave c?

6.20

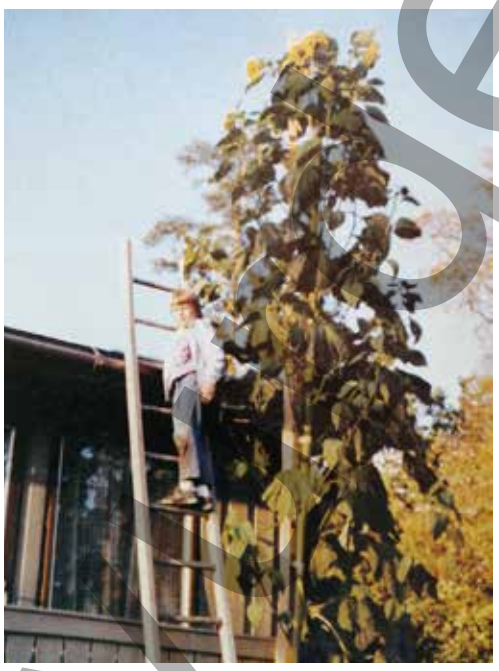
Bestem grenseverdiene hvis de eksisterer.

a $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{e^x}$ **b** $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{e^x - 1}$ **c** $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{2x} - e^x}{e^x - 1}$ **d** $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{2x} - 1}{e^x - 1}$

Tilvurdering

6C Kontinuitet

Vi setter noen solsikkefrø i en potte i februar og planter etter hvert ut de små solsikkene i hagen.
Fra dette tidspunktet lar vi $f(t)$ være høyden opp til det høyeste punktet på solsikkene ved tiden t.
Funksjonen f er et eksempel på en *kontinuerlig* funksjon. Det er vanlig å si at «se som solsikkene har skutt i været», men veksten skjer ikke i rykk og napp. Solsikken har en høyde hele tiden, og høyden endrer seg når tiden går. Grafisk ville solsikkehøyden ha gitt en sammenhengende kurve.



Norges høyeste solsikke.
September 1988 satte Richard Borge på Nykirke norgesrekord med en solsikke *Helianthus annuus* som ble målt til 5,645 m.

Vi bruker grenseverdibegrepet til å definere hva vi mener med en kontinuerlig funksjon:

Vi lar f være en funksjon og lar $a \in D_f$.
Vi sier at f er kontinuerlig i punktet a hvis $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

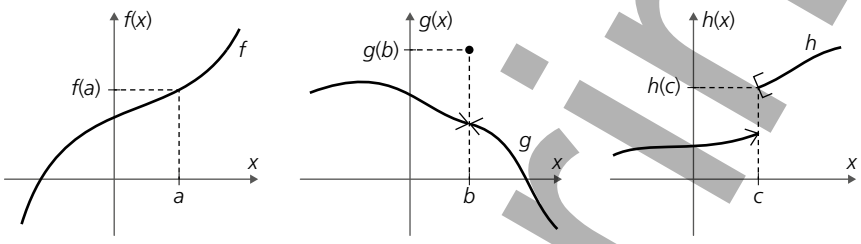
Hvis funksjonen ikke er kontinuerlig i punktet a, sier vi at funksjonen er diskontinuerlig i punktet a.

Vi sier at f er kontinuerlig hvis f er kontinuerlig for alle $a \in D_f$.

Tilvisering

Definisjonen forteller oss at en funksjon *f* er kontinuerlig i punktet *a* hvis grenseverdien når *x* går mot *a*, er lik *f*(*a*). Nedenfor har vi tegnet tre eksempler:

- Funksjonen *f* er kontinuerlig i punktet *a*.
- Funksjonen *g* er diskontinuerlig i punktet *b*.
- Funksjonen *h* er diskontinuerlig i punktet *c*.



Disse funksjonene er kontinuerlige i sin definisjonsmengde:

- **polynomfunksjoner**
- **rasjonale funksjoner**
- **potensfunksjoner**
- **eksponentialfunksjoner**

Summen, differansen, produktet, kvotienten og sammensetninger av kontinuerlige funksjoner er kontinuerlig.

Hva mener vi med *sammensetning* av funksjoner?

Funksjonen *f* gitt ved $f(x) = e^{2x+1}$ er sammensatt av en eksponentialfunksjon og en lineær funksjon. Det kan vi skrive slik:

$$f(x) = e^{u(x)}, \text{ der } u(x) = 2x + 1$$

Funksjonen *f* er kontinuerlig fordi den er sammensetning av kontinuerlige funksjoner.

Sammensatte funksjoner kommer vi tilbake til i kapittel 8.

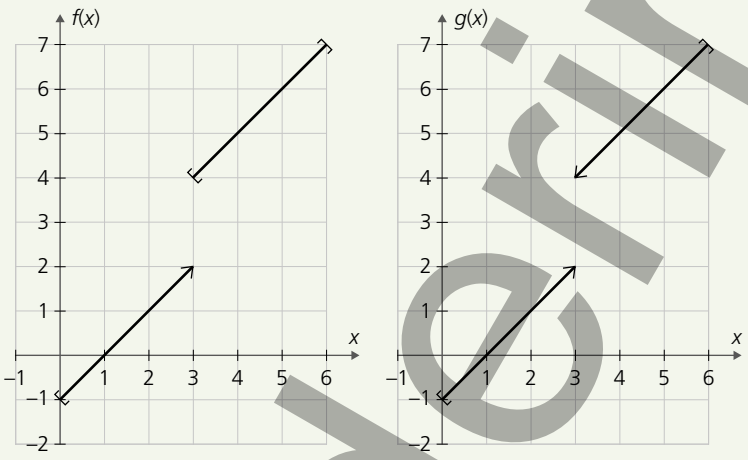
Til vurdering

EKSEMPEL 7

Funksjonene f og g er gitt ved

$$f(x)=\begin{cases} x-1 & \text{for} \quad 0 \le x < 3 \\ x+1 & \text{for} \quad 3 \le x \le 6 \end{cases} \quad \text{og} \quad g(x)=\begin{cases} x-1 & \text{for} \quad 0 \le x < 3 \\ x+1 & \text{for} \quad 3 < x \le 6 \end{cases}$$

Tegn grafene og avgjør om f og g er kontinuerlige funksjoner.



Funksjonene f og g er gitt ved lineære funksjonsuttrykk.
Vi vet at lineære funksjoner er kontinuerlige, men vi må undersøke bruddpunktet 3 nærmere.

Funksjonen f er definert i punktet 3, så vi undersøker om f er kontinuerlig i 3.
Når x nærmer seg 3 nedenfra, er uttrykket $x - 1$.
Når x nærmer seg 3 ovenfra, er uttrykket $x + 1$.
Det gir

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = 2 \quad \text{og} \quad \lim_{x \to 3^+} f(x) = 4$$

Vi ser at de ensidige grenseverdiene er forskjellige.
Derfor eksisterer ikke $\lim_{x \to 3} f(x)$, og vi får ikke oppfylt at $\lim_{x \to 3} f(x) = f(3)$.
Så f er ikke kontinuerlig i 3, og er derfor ikke en kontinuerlig funksjon.

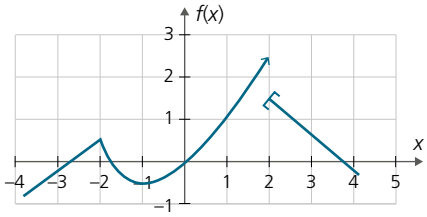
Funksjonen g er ikke definert i punktet 3, så g er kontinuerlig i alle punkter i definisjonsmengden. Derfor er g en kontinuerlig funksjon.

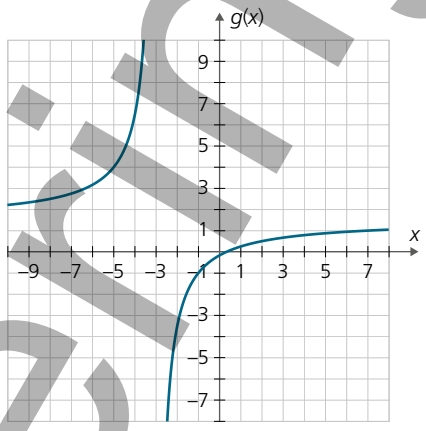
Merk!
For at vi skal kunne avgjøre om en funksjon f er kontinuerlig i et punkt a, må a være med i definisjonsmengden til f.
Hvis a er med i D_f, sjekker vi om $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Da må vi ofte regne ut ensidige grenseverdier.

Til vurdering

3.21

Bruk grafene til å avgjøre om funksjonene f og g er kontinuerlige når $D_f = \mathbb{R}$ og $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$.
For hvilke x-verdier er eventuelt funksjonene diskontinuerlige?





3.22

Definisjonsmengden til en funksjon er [0 , 6].

a Skisser hvordan grafen til funksjonen kan se ut hvis funksjonen er kontinuerlig.

b Skisser hvordan grafen til funksjonen kan se ut hvis funksjonen er diskontinuerlig i punktet 4.

3.23

Tegn grafene, og undersøk om funksjonene er kontinuerlige i punktet 3.

a $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{for} \quad x<3 \\ x-1 & \text{for} \quad x \geq 3 \end{cases}$

b $g(x) = \begin{cases} x+2 & \text{for} \quad x<3 \\ 14-x^2 & \text{for} \quad x \geq 3 \end{cases}$

c $h(x) = \begin{cases} x+2 & \text{for} \quad x<3 \\ 1 & \text{for} \quad x=3 \\ 14-x^2 & \text{for} \quad x>3 \end{cases}$

3.24

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}11x & \text{for} \quad x \leq 3 \\ \dfrac{1}{x} & \text{for} \quad x>3 \end{cases}$$

a Vis ved regning at f er diskontinuerlig i punktet 3.

b Tegn grafen til f. Zoom inn til du får bekreftet resultatet i oppgave a.

Tilvurdering

RØDE OPPGAVER

6.25

Bruk grafen til høyre til å bestemme

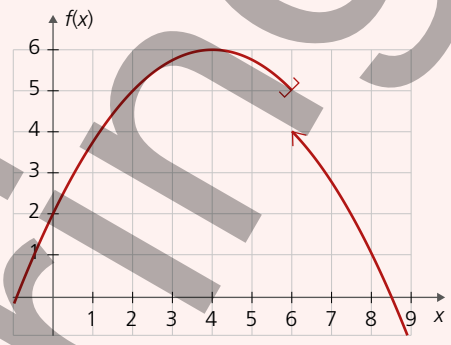
a grenseverdien til f når x går mot 6 nedenfra

b grenseverdien til f når x går mot 6 ovenfra

c følgende grenseverdier hvis de eksisterer:

$$\lim_{x \to 2} f(x) \text{ og } \lim_{x \to 6} f(x)$$

d om f er kontinuerlig. Begrunn svaret.

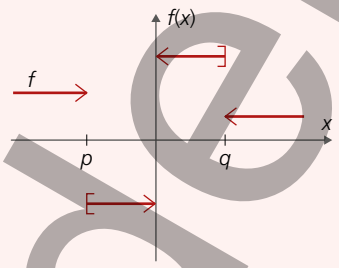


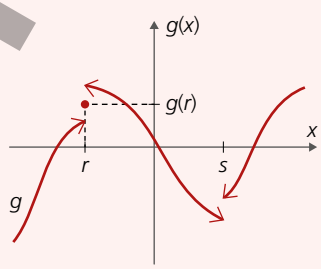
6.26

Til høyre har vi tegnet grafene til to funksjoner.

I hvilke punkter er funksjonen f diskontinuerlig, og i hvilke punkter er funksjonen g diskontinuerlig?

Begrunn svaret.





BLÅ OPPGAVER

6.27

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{for} \quad x < 2 \\ x - a & \text{for} \quad x = 2 \\ 7 - x & \text{for} \quad x > 2 \end{cases}$$

Bestem tallet a slik at f er kontinuerlig.

6.28

En selger har denne lønnsavtalen:

- Fast 20 000 kr per måned, uavhengig av hvor mye hun selger.
- Provisjon på 1 % av alt hun har solgt for i løpet av en måned hvis salget er på mellom 100 000 kr og 500 000 kr.
- Provisjon på 2 % av alt hun har solgt for i løpet av en måned hvis salget er på minst en halv million kroner.

Månedslønna er $L(x)$ kr hvis hun i løpet av en måned selger for x kr.

a I hvilke punkter er L diskontinuerlig?

b Finn funksjonsuttrykket til L og tegn grafen.

Til vurdering

6D Asymptoter

Vertikale asymptoter

En vertikal asymptote er en vertikal (loddrett) linje som grafen til en funksjon legger seg tett inntil når funksjonsverdien går mot uendelig eller minus uendelig.

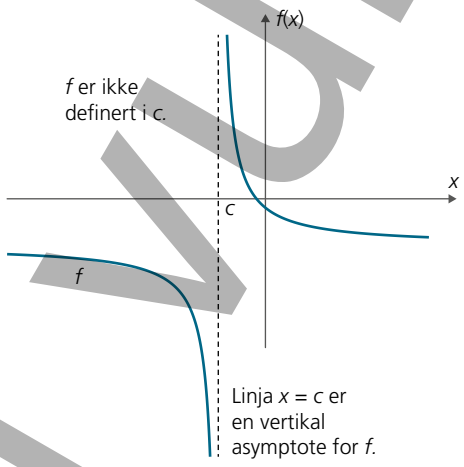
Likningen til en vertikal linje er på formen $x = c$, der c er et tall.

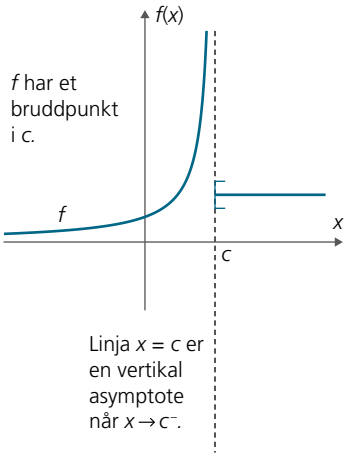
> Linja $x = c$ er en vertikal asymptote for funksjonen f hvis vi kan få absoluttverdien av $f(x)$ så stor vi vil ved å velge x nær nok c.

For å finne ut om en funksjon har vertikale asymptoter, må vi undersøke

- punkter der funksjonen ikke er definert
- bruddpunkter (hvis funksjonen har delt forskrift)

Nedenfor ser du to typiske tilfeller.





Til vurdering

EKSEMPEL 8

Funksjonen g er gitt ved $g(x) = \dfrac{x-1}{x^2-1}$.

Finn eventuelle vertikale asymptoter.

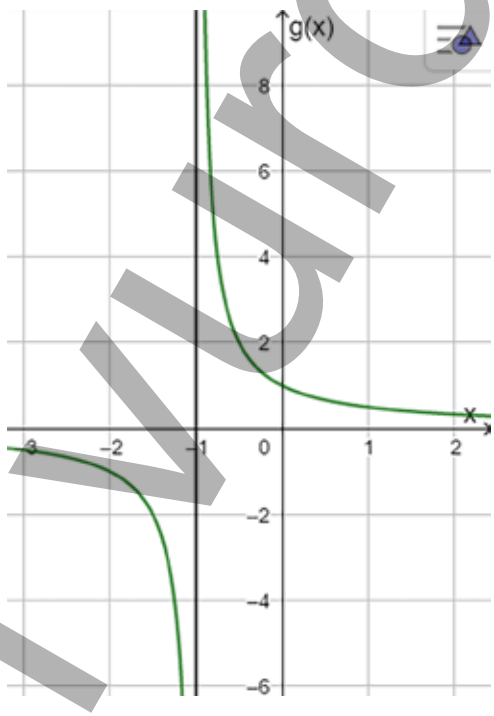
Funksjonen er definert for alle x unntatt de x-verdiene som gjør at nevneren er 0. Vi finner derfor nullpunktene til nevneren.

$$\begin{aligned} x^2 - 1 &= 0 \\ x^2 &= 1 \\ x = -1 \quad &\vee \quad x = 1 \end{aligned}$$

Siden $x = 1$ er et felles nullpunkt for telleren og nevneren, kan vi faktorisere og forkorte. Det gir

$$g(x) = \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{x-1}{(x+1)(x-1)} = \frac{1}{x+1} \quad \text{når} \quad x \neq -1$$

Nå ser vi at $g(x) \to \infty$ når $x \to -1^+$ og at $g(x) \to -\infty$ når $x \to -1^-$.
Linja $x = -1$ er derfor en vertikal asymptote for g.



Hvis vi med GeoGebra tegner grafen til g i eksemplet ovenfor sammen med den vertikale asymptoten, ser vi at grafen ligger tett inntil asymptoten når x nærmer seg -1.
Punktet $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ er ikke med på grafen, men det kan vi ikke se i dette grafikkbildet. Skriver vi $g(1)$ i algebrafeltet, kommer det opp «udefinert».

Tilvurdering

6.29

Undersøk om funksjonen har vertikale asymptoter.

a $f(x)=\dfrac{3x+1}{x-5}$ **b** $g(x)=\dfrac{x}{x^2-25}$

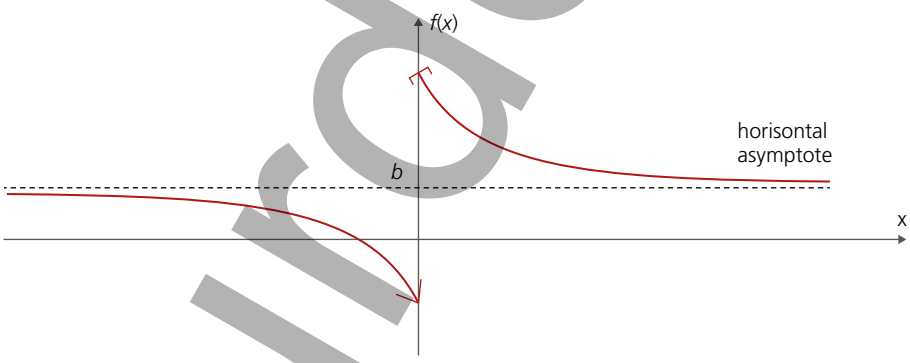
c $h(x)=\dfrac{x+1}{x^2-1}$ **d** $i(x)=\dfrac{4}{x+2}$

e $j(x)=\dfrac{x+1}{x^2+1}$ **f** $k(x)=\begin{cases}2x+1 & \text{for } x\le 3\\ \dfrac{1}{x-3} & \text{for } x>3\end{cases}$

Horisontale asymptoter

En horisontal asymptote er en horisontal (vannrett) linje som grafen ligger tett inntil når $x\to\infty$ og/eller når $x\to-\infty$.

Likningen til en horisontal asymptote er på formen $y=b$, der b er et tall.



Linja $y=b$ er en horisontal asymptote for funksjonen f hvis

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=b \quad \text{og/eller} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=b$$

For å finne ut om en funksjon har horisontale asymptoter, må vi finne ut hva som skjer med funksjonen når $x\to\infty$ og når $x\to-\infty$.

Til vurdering

EKSEMPEL 9

Finn eventuelle horisontale asymptoter.

a $f(x)=\dfrac{2x^2+2x+5}{x^2+1}$ **b** $g(x)=\dfrac{2x^3+3}{x^2+1}$

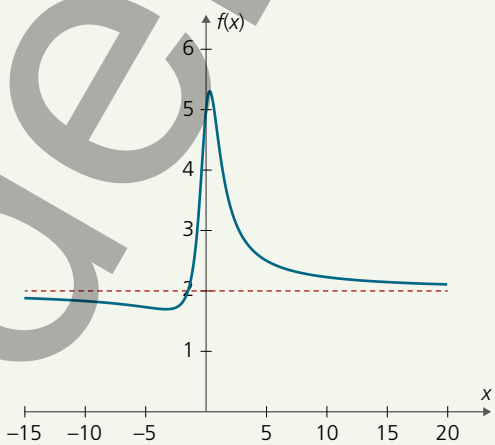
a Vi undersøker hva som skjer når x blir svært stor i absoluttverdi. Vi starter med å dividere med x^2 i teller og nevner. Det gir

$$f(x)=\frac{2x^2+2x+5}{x^2+1}=\frac{\dfrac{2x^2}{x^2}+\dfrac{2x}{x^2}+\dfrac{5}{x^2}}{\dfrac{x^2}{x^2}+\dfrac{1}{x^2}}=\frac{2+\dfrac{2}{x}+\dfrac{5}{x^2}}{1+\dfrac{1}{x^2}}$$

Småbrøkene går mot 0 når |x| blir svært stor.

Da ser vi at $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\dfrac{2}{1}=2$.

Derfor er $y=2$ en horisontal asymptote for f.

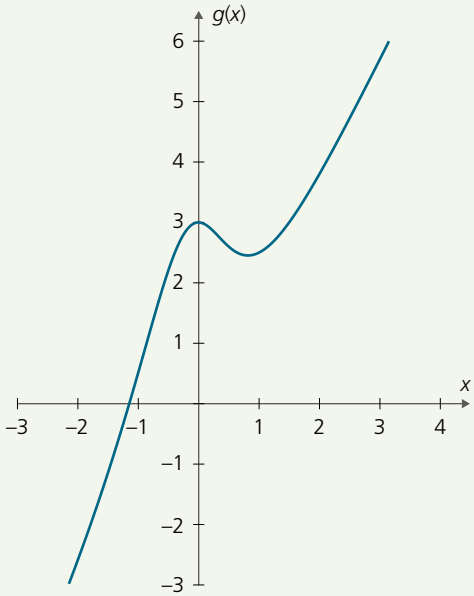


b Vi dividerer med x^3 i teller og nevner. Det gir

$$g(x)=\frac{2+\dfrac{1}{x^3}}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^3}}$$

Her går telleren mot 2 og nevneren mot 0 når $x\to\pm\infty$. Altså er $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x)=\pm\infty$.

Funksjonen g har derfor ingen horisontale asymptoter.



Tilvurdering

6.30

Undersøk om funksjonen har horisontale asymptoter når den er gitt ved

a $f(x)=\dfrac{2}{x-3}$ **b** $g(x)=\dfrac{x^2+2}{x}$ **c** $h(x)=\dfrac{4x^3+1}{2x^3+x}$

6.31 (Eksamen Forkurset 2014)

Vi har funksjonen f gitt ved $f(x)=\dfrac{x+2}{x-3}$, $D_f=\mathbb{R}\setminus\{3\}$.

Finn ved regning eventuelle nullpunkt og asymptoter til funksjonen.

EKSEMPEL 10

La f være funksjonen gitt ved $f(x)=\dfrac{1}{e^x-1}$.

Finn eventuelle asymptoter for f.

Uttrykket til f er definert for alle x unntatt de x-verdiene som gjør at nevneren er 0.

$$e^x-1=0$$
$$e^x=1$$
$$x=0$$

Når x nærmer seg 0 nedenfra, er nevneren negativ og går mot 0. Det gir

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{e^x-1}=-\infty$$

Når x nærmer seg 0 ovenfra, er nevneren positiv og går mot 0. Det gir

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{e^x-1}=\infty$$

Derfor er $x=0$ (y-aksen) en vertikal asymptote for f.

Vi sjekker så hva som skjer med $f(x)$ når x går mot uendelig og minus uendelig. Når x går mot uendelig, vil nevneren gå mot uendelig. Det gir

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x-1}=0$$

Når x går mot minus uendelig, vil e^x gå mot 0. Det gir

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{e^x-1}=\frac{1}{0-1}=-1$$

Det vil si at $y=0$ (x-aksen) er en horisontal asymptote for f når $x\to\infty$, og at $y=-1$ er en horisontal asymptote for f når $x\to-\infty$.

Tilvurdering

6.32
La g være funksjonen gitt ved $g(x) = e^{-x}$.
Finn eventuelle asymptoter og tegn grafen til g sammen med asymptotene.

6.33
La h være funksjonen gitt ved $h(x) = \frac{1}{e^x - e}$.
Finn eventuelle asymptoter og tegn grafen til h sammen med asymptotene.

UTFORSK

Finn en funksjon som har ett nullpunkt, to vertikale asymptoter og én horisontal asymptote.

EKSEMPEL 11

Vi baker pepperkaker og steker dem i ovnen.
En modell for temperaturutviklingen i kakene etter at de har kommet ut av ovnen, er gitt ved

$$f(t) = 205e^{-0,455t} + 20$$

Her er $f(t)$ °C temperaturen t minutter etter at kakene er tatt ut av ovnen.
Finn den horisontale asymptoten for f og forklar hva den forteller oss.

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{t \to \infty} \left(205e^{-0,455t} + 20\right) = 205 \cdot 0 + 20 = 20$$

Den horisontale asymptoten for f er $y = 20$.
Vi vet at temperaturen i kakene etter hvert nærmer seg romtemperaturen, som derfor i dette tilfellet må være 20 °C.

6.34
En literkartong med melk blir stående igjen på kjøkkenbenken etter frokost.
En modell for temperaturforskjellen $F(t)$ mellom rommet og melken ved tiden t er gitt ved

$$F(t) = 15,0 \cdot 0,589^t$$

Her er $F(t)$ målt i °C og t i timer.
Finn den horisontale asymptoten for F og forklar hva den forteller oss.

Til vurdering

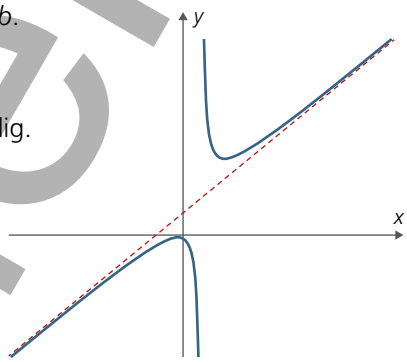
6.35
Funksjonen T gitt ved

$$T(t) = 480 \cdot e^{-0{,}057t} + 31$$

viser temperaturen $T(t)$ °C i et metallstykke t minutter etter at en smed har tatt det ut av ovnen.
Undersøk om T har asymptoter, og forklar hvilken praktisk tolkning de i så fall har.

Skrå asymptoter

Skrå asymptoter er linjer på formen $y = ax + b$.
Når en funksjon f har en skrå asymptote, vil grafen til f nærme seg en rett linje når x går mot uendelig og/eller minus uendelig.



Linja $y = ax + b$ er en skrå asymptote for funksjonen f når $x \to \pm\infty$ hvis $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$.

EKSEMPEL 12

La f være funksjonen gitt ved $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x}$.
Vis at $y = x$ er en skrå asymptote for f når $x \to \pm\infty$.

For at $y = x$ skal være en skrå asymptote for f, må differansen mellom $f(x)$ og x gå mot 0 når $x \to \pm\infty$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to \pm\infty}\left(\frac{x^2 - 1}{x} - x\right) &= \lim_{x \to \pm\infty}\left(\frac{x^2}{x} - \frac{1}{x} - x\right) \\
&= \lim_{x \to \pm\infty}\left(x - \frac{1}{x} - x\right) \\
&= \lim_{x \to \pm\infty}\left(-\frac{1}{x}\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Dermed har vi vist at $y = x$ er en skrå asymptote for f når $x \to \pm\infty$.

Tilvurdering

EKSEMPEL 13

La f være funksjonen gitt ved $f(x)=\dfrac{3x^2-x+2}{x-1}$.
Finn asymptotene for f.

Det er bare nevneren som går mot 0 når x går mot 1.
Den vertikale asymptoten for f er derfor $x=1$.

Siden telleren er et polynom av høyere grad enn nevneren, har ikke f horisontal asymptote.
Vi utfører en polynomdivisjon for å finne den skrå asymptoten.

$$\frac{3x^2-x+2}{x-1} = (3x^2-x+2):(x-1)=3x+2+\frac{4}{x-1}$$

$$\begin{array}{r} \underline{-(3x^2-3x)} \\ 2x+2 \\ \underline{-(2x-2)} \\ 4 \end{array}$$

Differansen mellom $f(x)=3x+2+\dfrac{4}{x-1}$ og $y=3x+2$ er $\dfrac{4}{x-1}$, som går mot 0 når $x\to\pm\infty$.
Den skrå asymptoten for f er derfor $y=3x+2$.

6.36
La f være funksjonen gitt ved $f(x)=\dfrac{x^3-x^2-1}{x^2}$.

a Forklar at $x=0$ er en vertikal asymptote for f.
b Vis at $y=x$ er en skrå asymptote for f.

6.37
La f være funksjonen gitt ved $f(x)=\dfrac{x^2-3x+5}{x-2}$.

a Vis ved polynomdivisjon at vi kan skrive $f(x)=x-1+\dfrac{3}{x-2}$.
b Finn asymptotene for f.
c Tegn grafen til f sammen med asymptotene.

UTFORSK

a Rasjonale funksjoner kan skrives på formen

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$$

der P og Q er polynomfunksjoner.
Undersøk sammenhengen mellom graden til P og graden til Q og hvilke asymptoter f kan ha.

b Undersøk om det fins funksjoner som har både vertikal, horisontal og skrå asymptote.

Til vurdering

RØDE OPPGAVER

6.38

Finn eventuelle asymptoter for funksjonen f gitt ved

a $f(x)=\dfrac{1-6x}{2x-4}$ **b** $f(x)=\dfrac{2x^2+2x+5}{x^2+1}$ **c** $f(x)=\dfrac{x^2-9}{2x+6}$ **d** $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x}$

6.39

En modell for vanninnholdet i et jordlag ved tiden t er gitt ved $v(t)=10-8{,}2e^{-0{,}2t}$.
Her er vanninnholdet målt i mm og tiden målt i timer.
Bestem eventuelle asymptoter for v og gi en praktisk tolkning av resultatet.

6.40

En bedrift regner med at enhetskostnaden $G(x)$ kr for en vare de produserer, er

$$G(x)=0{,}3x+70+\frac{12\,000}{x}$$

der x er antall produserte enheter av varen.

a Finn skråasymptoten for G, og tegn grafen til G sammen med asymptoten.

b Bruk resultatet i oppgave a til å finne en tilnærmet verdi for enhetskostnaden ved en produksjon på 10 000 enheter. Sammenlikn med $G(10\,000)$.

6.41

Finn eventuelle asymptoter til funksjonen f gitt ved $f(x)=\dfrac{4x-x^2-3}{x-4}$.

6.42 (Eksamen Forkurset 2021)

Finn eventuelle asymptoter til funksjonen f gitt ved $f(x)=\dfrac{x^3-2x^2-19x+20}{x-5}$.

BLÅ OPPGAVER

6.43

Bestem et mulig funksjonsuttrykk for en rasjonal funksjon f når du får vite at

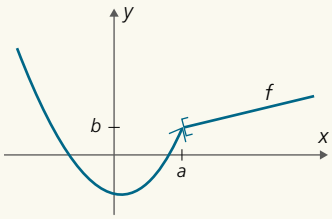
- $x=-1$ er det eneste nullpunktet
- linja $x=3$ er den eneste vertikale asymptoten
- definisjonsmengden er $D_f=\mathbb{R}\setminus\{-2,3,5\}$
- $\lim\limits_{x\to-2} f(x)=0$
- $\lim\limits_{x\to5} f(x)=4$

Tilvurdering

SAMMENDRAG

Grenseverdier

En grenseverdi eksisterer hvis den er lik et tall.



Hvis vi kan få $f(x)$ så nær tallet b vi vil ved å velge x nær nok a, men ikke lik a, har vi at $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$.

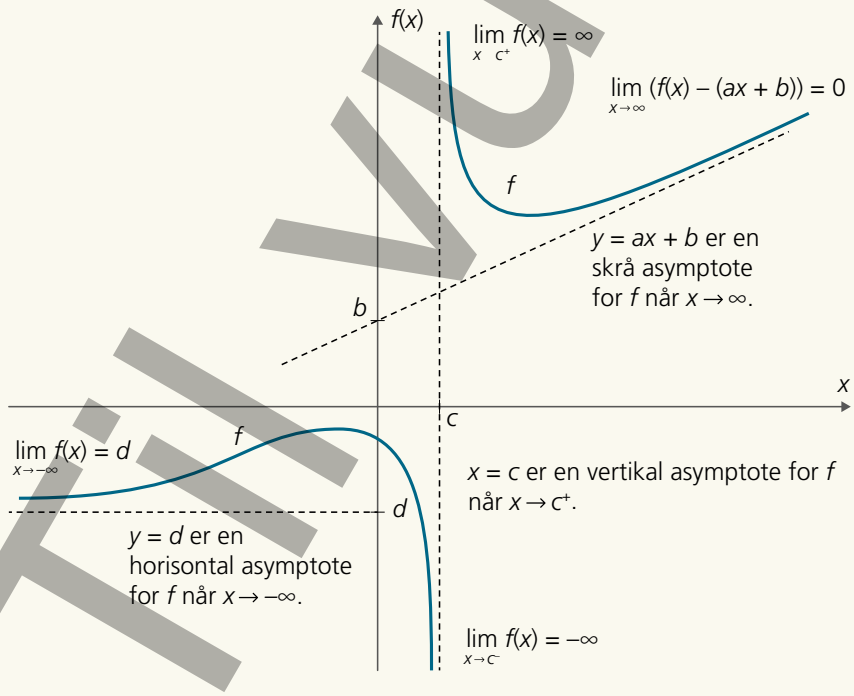
Da er $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = b$.

Kontinuitet

La f være en funksjon og la $a \in D_f$.
Vi sier at f er kontinuerlig i punktet a hvis $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.
Hvis ikke er funksjonen diskontinuerlig i a.
Vi sier at f er kontinuerlig hvis f er kontinuerlig for alle $a \in D_f$.

Asymptoter

En asymptote for en funksjon er en linje som grafen til funksjonen nærmer seg.



Til vurdering