15

Integrasjon

KAPITTELINNHOLD

15A Det bestemte integralet *604*
15B Numerisk integrasjon *617*
15C Bruk av det bestemte integralet *627*
15D Analysens fundamentalteorem *638*
15E Integrasjonsmetoder *653*
15F Volum ved integrasjon *666*

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) var en tysk filosof og matematiker, og han er berømt for sine arbeider innen *differensialregning* og *integralregning*.

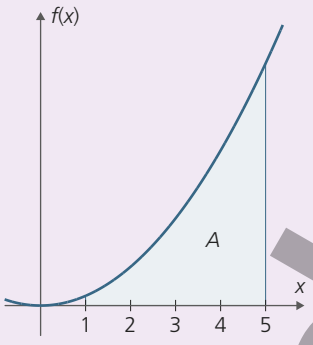
Leibniz introduserte *differensialene* dx og dy som skrivemåte for Δx og Δy når de er uendelig små. Det innebærer at stigningstallet til tangenten i et punkt på grafen til en funksjon f er $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, som igjen betyr at $f'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$. Fordelen med denne skrivemåten or den deriverte er at selv om dx og dy er veldig nære null, er de likevel tallstørrelser vi kan regne med algebraisk. Det får du behov for i dette kapitlet.

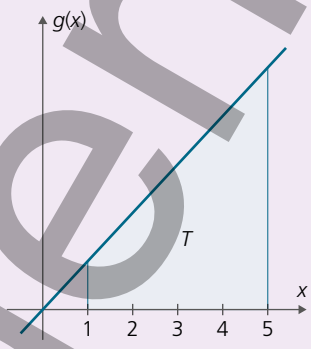
Tilvurdering

15A Det bestemte integralet

UTFORSK

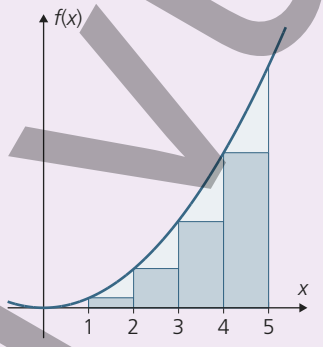
Figurene viser grafen til funksjonene f og g gitt ved $f(x) = x^2$ og $g(x) = 5x$. På begge figurene er det markert et område mellom grafen og x-aksen, som i tillegg er avgrenset av de vertikale linjene $x = 1$ og $x = 5$.

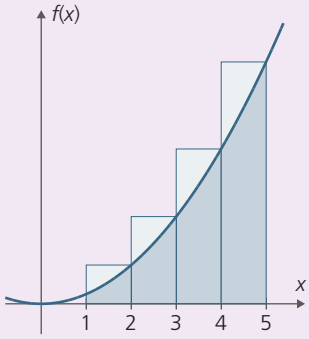




Hva er det eksakte arealet T av området under grafen til g, i figuren til høyre? Omtrent hvor stort anslår du at arealet A av området under grafen til f er?

Vi kan finne tilnærmede verdier for A ved å tegne rektangler. Vi tegner først rektangler *under* grafen til f. Se på figuren til venstre nedenfor. Med fire like brede rektangler er det samlede arealet av rektanglene 30.
Vi tegner så rektangler *over* grafen til f. Se på figuren til høyre nedenfor. Det samlede arealet av disse fire rektanglene er 54.





Vis hvordan vi har regnet for å komme fram til det samlede arealet i de to tilfellene.

Verdien av arealet A må ligge et sted mellom 30 og 54.
Foreslå måter du kan tilnærme A bedre.

Tilvurdering

UTFORSK

Undersøk hva programmet nedenfor regner ut. Gjør endringer i programmet slik at du finner en god tilnærmingsverdi for arealet *A*.

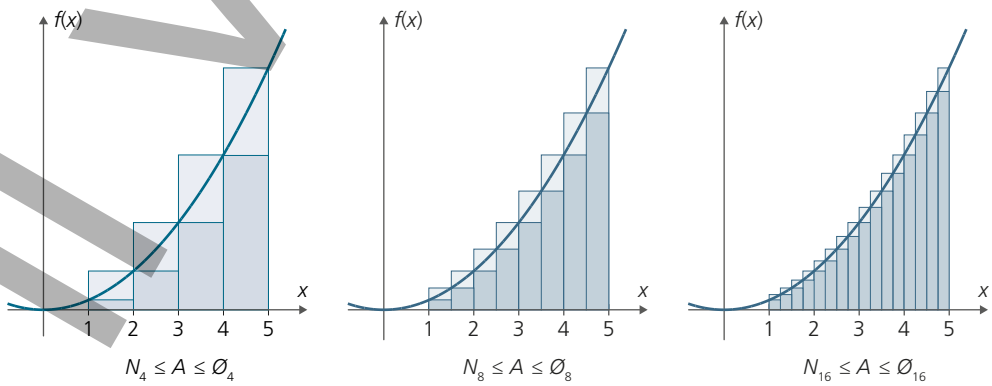
```
n = 4          # antall rektangler

def f(x):
  return x**2

areal = 0
bredde = (5 - 1)/n

for i in range(n):
  hoyde = f(1 + i*bredde)
  areal = areal + hoyde*bredde

print(areal)
```

I Utforsk ovenfor kan vi finne arealet *T* eksakt, fordi området har form som en kjent geometrisk figur, et trapes. Arealet *A* finner vi bare tilnærmingsverdier for.

Det samlede arealet av rektanglene under og over grafen kaller vi henholdsvis en *nedre trappesum N* og en *øvre trappesum Ø* for funksjonen *f*. Fordi summene i dette tilfellet består av fire rektangler, kaller vi dem N_4 og $Ø_4$. Og siden de er tegnet mellom $x = 1$ og $x = 5$, kaller vi dem «nedre og øvre trappesummer til *f* i intervallet [1 , 5]».

Arealet av området under grafen til *f* må ligge mellom de to trappesummene. Altså er $N_4 \leq A \leq Ø_4$.

La oss øke antallet rektangler.



Tilvurdering

En nedre trappesum vil alltid være mindre enn eller lik arealet A, og en øvre vil alltid være større enn eller lik A. Vi kan skrive $N_n \leq A \leq Ø_n$, der $n \in \mathbb{N}$.

Vi får to følger av trappesummer, $\{N_n\}$ og $\{Ø_n\}$. Da er N_1 og $Ø_1$ arealet av bare ett rektangel hver. Avviket til A er stort. N_{16} og $Ø_{16}$ er summer av arealer av 16 rektangler hver. Da er avviket mye mindre.

Vi tenker oss at antall rektangler i trappesummene går mot uendelig, $n \to \infty$. Ideen er at trappesummene da blir bedre og bedre tilnærminger for A, og at de begge nærmer seg A som en felles grenseverdi.

$$\lim_{n\to\infty} N_n = \lim_{n\to\infty} Ø_n = A$$

EKSEMPEL 1

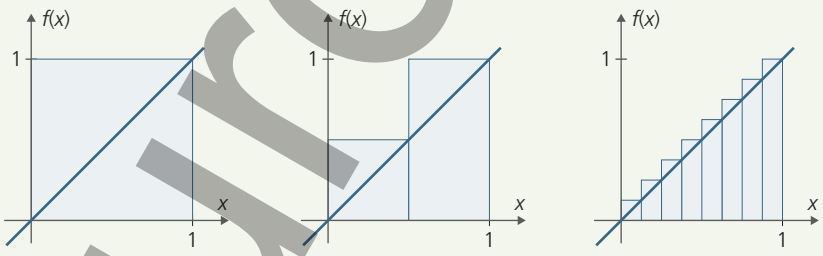
Funksjonen f er gitt ved $f(x) = x$.

a Lag figurene som illustrerer de øvre trappesummene $Ø_1$, $Ø_2$ og $Ø_8$, til f i intervallet [0 , 1]. Bestem trappesummene.

b Bestem et uttrykk for $Ø_n$ til f i intervallet [0 , 1].

c Bestem grenseverdien $\lim_{n\to\infty} Ø_n$, og gi en geometrisk tolkning av denne.

a Figurene nedenfor viser $Ø_1$, $Ø_2$ og $Ø_8$.



Bredden på det ene rektanglet som svarer til $Ø_1$, er 1, og høyden er $f(1)$.

$$Ø_1 = 1 \cdot f(1) = 1 \cdot 1 = 1$$

Bredden på hvert rektangel i $Ø_2$ er $\frac{1}{2}$, og høyden er funksjonsverdien i det høyre endepunktet.

$$Ø_2 = \frac{1}{2} \cdot f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot f(1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

Bredden på hvert rektangel i $Ø_8$ er $\frac{1}{8}$, og høyden er funksjonsverdien i det høyre endepunktet.

$$\begin{aligned} Ø_8 &= \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{8} + \frac{1}{8} \cdot \frac{3}{8} + \cdots + \frac{1}{8} \cdot \frac{8}{8} \\ &= \frac{1}{64}(1 + 2 + 3 + \cdots + 8) \\ &= \frac{1}{64} \cdot 36 = \frac{9}{16} \end{aligned}$$

Til vurdering

b Bredden på hvert rektangel er $\frac{1}{n}$, og høyden er funksjonsverdien i det høyre endepunktet.

$$\begin{aligned}\varnothing_n &= \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}+\frac{1}{n}\cdot\frac{3}{n}+\cdots+\frac{1}{n}\cdot\frac{n}{n}\\ &= \frac{1}{n^2}(1+2+3+\cdots+n)\\ &= \frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\\ &= \frac{n+1}{2n}\end{aligned}$$

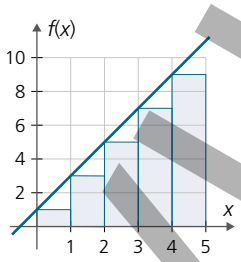
Vi bruker formelen for summen av de *n* første naturlige tallene.

c $$\lim_{n\to\infty}\varnothing_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{2} = \frac{1}{2}$$

Etter hvert som antall rektangler øker, ser vi av figurene på forrige side at summen $\varnothing_n$ nærmer seg arealet av trekanten avgrenset av x-aksen, grafen til f og linja $x = 1$. Arealet av denne trekanten er $\frac{1}{2}$, og dermed likt grenseverdien.

15.1

Funksjonen f er gitt ved $f(x) = 2x + 1$.
Figuren viser grafen til f og fem rektangler under grafen.



a Bestem de nedre trappesummene N_1 og N_5 til f i intervallet [0 , 5].

b Lag et program som finner N_5 og N_{50}.

Vi kan vise at N_n til f i intervallet [0 , 5] er $N_n = \frac{30n-25}{n}$.

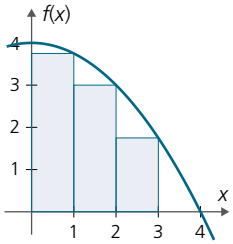
c Bestem grenseverdien $\lim_{n\to\infty} N_n$, og gi en geometrisk tolkning av den.

Til vurdering

15.2

Funksjonen f er gitt ved $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 4$.

Figuren viser grafen til f og tre rektangler under grafen.



a Regn ut $f(1) \cdot 1 + f(2) \cdot 1 + f(3) \cdot 1$.
Hvilket areal tilsvarer dette?

b Tegn grafen til f i GeoGebra og finn det samlede arealet av de markerte rektanglene på figuren ved å bruke kommandoen
SumUnder(<Funksjon>, <Start>, <Slutt>, <Antall rektangler>).
Sammenlikn med svaret ditt i oppgave a.

c Legg inn, på tilsvarende måte som i oppgave b, seks rektangler i intervallet [0 , 3] i stedet for tre.
Hvor stort er det samlede arealet av de seks rektanglene?

d Gjenta oppgave b med 30 rektangler.

e Gjør oppgavene b–d ved å bruke kommandoen
SumOver(<Funksjon>, <Start>, <Slutt>, <Antall rektangler>) i GeoGebra.

f Tenk deg at du på tilsvarende måte som i oppgavene b og e legger inn n rektangler. Hvilken grenseverdi ser det ut som det samlede arealet av de n rektanglene går mot når $n \to \infty$?
Gi en tolkning av denne grenseverdien.

15.3

Funksjonen f er gitt ved $f(x) = \frac{1}{x}$.

a Finn den nedre trappesummen N_4 til f i intervallet [1 , 5].

b Finn den øvre trappesummen $Ø_4$ til f i intervallet [2 , 6].

c Forklar sammenhengen mellom svarene i oppgave a og b.

d Lag et program som finner $Ø_4$ og N_4.

15.4

Funksjonen f er gitt ved $f(x) = 9 - x^2$.

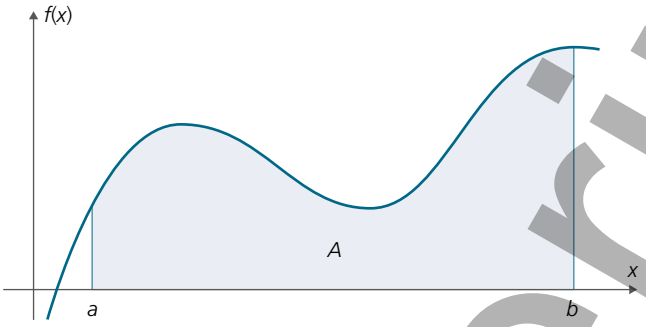
a Finn trappesummene N_1, N_3, $Ø_1$ og $Ø_3$ til f i intervallet [–3 , 3].

b Bestem grenseverdiene $\lim_{n \to \infty} N_n$ og $\lim_{n \to \infty} Ø_n$.

Tilvurdering

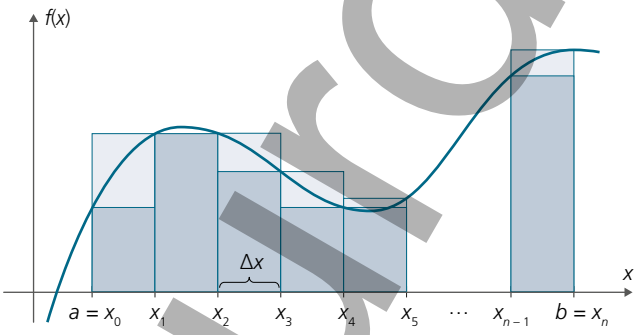
Definisjon av det bestemte integralet

La f være en kontinuerlig funksjon som er definert i intervallet $[a\ ,\ b]$, der $f(x) \geq 0$ for alle $x \in [a\ ,\ b]$. Grafen til f, x-aksen og linjene $x = a$ og $x = b$ avgrenser et område med arealet A



Vi deler intervallet $[a\ ,\ b]$ inn i n like store deler, med bredde $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$.

Vi tegner inn rektangler i delintervallene. For nedre trappesum N_n velger vi den minste funksjonsverdien i intervallet som høyde i hvert rektangel, og for øvre trappesum $Ø_n$ velger vi den største funksjonsverdien som høyde.



Vi lar $n \to \infty$ slik at $\Delta x \to 0$.
Vi sier at følgene av trappesummer, $\{N_n\}$ og $\{Ø_n\}$, konvergerer mot en grenseverdi hvis N_n og $Ø_n$ kommer nærmere og nærmere denne verdien når $n \to \infty$. Når de to følgene konvergerer mot den samme grenseverdien, kaller vi denne grenseverdien *det bestemte integralet* til f i intervallet $[a\ ,\ b]$,

og skriver $\int_a^b f(x)\,dx$. Dette leser vi «det bestemte integralet til f fra a til b».

$\int$ er et integraltegn (en utstrakt S for sum).

$f(x)$ kaller vi *integranden*, det er funksjonsuttrykket til funksjonen f.

dx kaller vi *differensialet*. Det viser hva som er variabelen, og svarer til Δx i trappesummen. Vi tenker på dx som bredden av veldig smale intervaller.

a er den nedre grensen for integralet.

b er den øvre grensen for integralet.

Tilvurdering

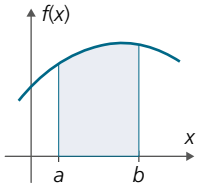
Det bestemte integralet som en grenseverdi til en følge av summer

$$\lim_{n\to\infty} N_n = \lim_{n\to\infty} Ø_n = \int_a^b f(x)\,dx$$

Merk!
Hvis de to grenseverdiene er like, er det bestemte integralet lik arealet A. Dette er alltid tilfellet for kontinuerlige funksjoner, og vi sier da at f er integrerbar i intervallet $[a\,,\,b]$.
Hvis grenseverdiene er forskjellige, er f ikke integrerbar.
Alle funksjonene du møter i forkurset, er integrerbare.

La f være en kontinuerlig funksjon definert i intervallet $[a\,,\,b]$, og la $f(x) \geq 0$ for alle $x \in [a\,,\,b]$.

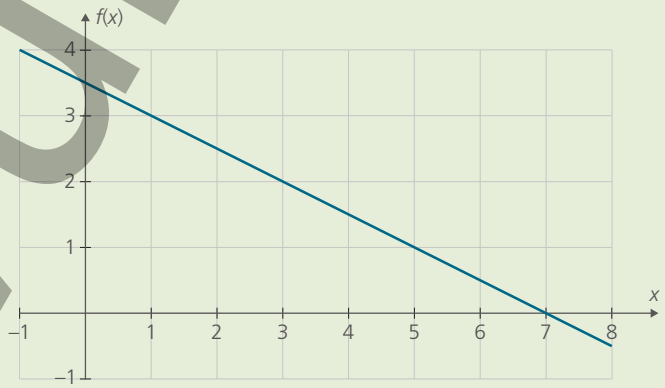
Da er $\int_a^b f(x)\,dx$ lik arealet av området som er avgrenset av grafen til f, x-aksen og linjene $x = a$ og $x = b$.



EKSEMPEL 2

Figuren viser grafen til en lineær funksjon f.

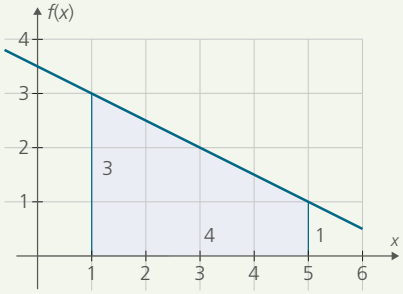
Bestem $\int_1^5 f(x)\,dx$.



Vi finner arealet av området som er avgrenset av grafen til f, x-aksen og linjene $x = 1$ og $x = 5$. Dette området har form som et trapes.
Arealformelen for trapes gir

$$\frac{(3+1)\cdot 4}{2} = 8.$$

Altså er $\int_1^5 f(x)\,dx = 8$.



Tilvurdering

15.5

Bruk figuren øverst i eksempel 2 til å bestemme integralet.

a $\int_1^3 f(x)\,dx$ **b** $\int_1^7 f(x)\,dx$ **c** $\int_{-1}^1 f(x)\,dx$ **d** $\int_0^7 f(x)\,dx$

15.6

a Tegn grafen til funksjonen g gitt ved $g(x) = x + 2$.

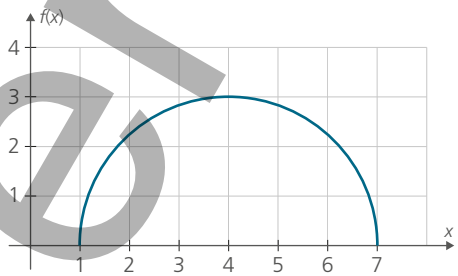
b Marker området avgrenset av grafen til g, x-aksen og linjene $x = 1$ og $x = 3$.

c Skriv arealet av området i oppgave b som et bestemt integral.

15.7

Halvsirkelen på figuren har sentrum i (4 , 0) og er grafen til en funksjon f. Bestem eksakt verdi for

a $\int_1^7 f(x)\,dx$ **b** $\int_4^7 f(x)\,dx$



15.8

Funksjonen f er gitt ved $f(x) = 3 - |x|$.

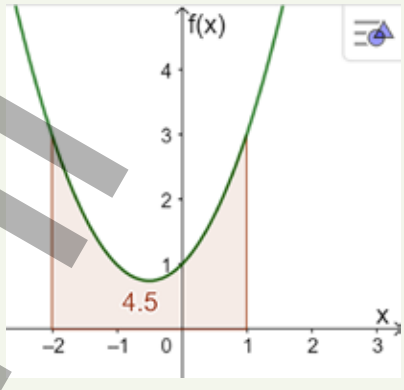
Bestem eksakt verdi for $\int_{-3}^3 f(x)\,dx$.

EKSEMPEL 3

Funksjonen f er gitt ved $f(x) = x^2 + x + 1$.

Finn $\int_{-2}^1 f(x)\,dx$.

Vi finner arealet av området avgrenset av grafen til f, x-aksen og linjene $x = -2$ og $x = 1$ ved å første tegne grafen til f i GeoGebra.
Så bruker vi kommandoen Integral(<Funksjon>, <Start>, <Slutt>).
Vi skriver altså Integral(f,-2,1) i inntastingsfeltet.
Skjermbildet viser resultatet.



Det aktuelle området er markert og har arealet 4,5.

Tilvurdering

15.9

Funksjonen f er gitt ved $f(x) = e^x$.

a Finn arealet av området avgrenset av grafen til f, x-aksen og linjene $x = -1$ og $x = 1$.

b Finn arealet av området avgrenset av grafen til f, koordinataksene og linja $x = \ln 3$.

c Finn en tilnærmet verdi for $\int_1^2 f(x)\,dx$. Gi svaret med tre desimaler. Hva forteller dette svaret?

15.10

Ta for deg det bestemte integralet $I = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx$.

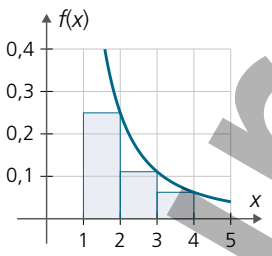
a Finn en tilnærmet verdi for I.

b Forklar hvordan du kan finne den eksakte verdien av I ved hjelp av et geometrisk resonnement.

15.11

Funksjonen f er gitt ved $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

Figuren viser grafen til f og tre rektangler under grafen i intervallet [1 , 4].



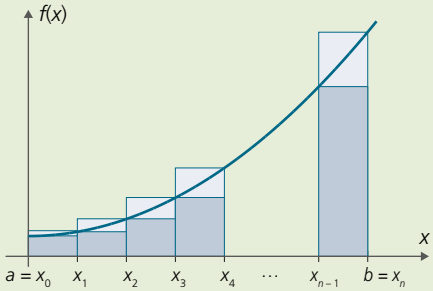
a Finn det samlede arealet av rektanglene.

b Vi ser på den uendelige følgen av trappesummer i intervallet [1 , 4]. Uttrykk grenseverdien til følgen som et integral.

Til vurdering

EKSEMPEL 4

Figuren viser grafen til en funksjon som er strengt voksende i intervallet $[a\ ,\ b]$.



a Finn et uttrykk for nedre trappesum for f i intervallet $[a\ ,\ b]$ når det er delt i n like brede delintervaller.

b Finn et uttrykk for øvre trappesum på tilsvarende måte.

c Uttrykk integralet $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ som en grenseverdi.

a Bredden av rektanglene på figuren er $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$.

Høyden i rektanglene er $f(x_0), f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_{n-1})$.

Nedre trappesum er derfor

$$N_n = f(x_0)\cdot\Delta x + f(x_1)\cdot\Delta x + f(x_2)\cdot\Delta x + \cdots + f(x_{n-1})\cdot\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\cdot\Delta x$$

b Bredden av rektanglene er $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$.

Høyden i rektanglene er $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots, f(x_n)$.

Øvre trappesum er derfor

$$Ø_n = f(x_1)\cdot\Delta x + f(x_2)\cdot\Delta x + f(x_3)\cdot\Delta x + \cdots + f(x_n)\cdot\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot\Delta x$$

c Siden $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$, blir bredden av rektanglene mindre og mindre når antall rektangler øker, $\Delta x \to 0$ når $n \to \infty$. Vi har definert det bestemte integralet som grenseverdien til trappesummene, se side 000, og setter inn resultatene fra a og b.

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\cdot\Delta x = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot\Delta x$$

Til vurdering

15.12

Funksjonen g er strengt avtakende i intervallet $[a\ ,\ b]$.

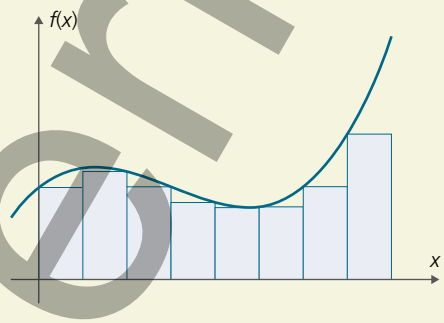
a Lag en figur tilsvarende den i eksempel 4, som viser nedre og øvre trappesum for en strengt avtakende funksjon.

b Finn et uttrykk for nedre og øvre trappesum i intervallet $[a\ ,\ b]$ med n like brede delintervaller.

c Uttrykk integralet $\int_a^b g(x)\,dx$ som en grenseverdi.

SNAKK

Figuren til høyre viser grafen til en funksjon f og en nedre trappesum for funksjonen. Hvorfor er det vanskelig å uttrykke $\int_a^b f(x)\,dx$ på en tilsvarende måte som i eksempel 4 og oppgave 15.12?



UTFORSK

La funksjonen f være gitt ved $f(x) = x^2$.
Vi tenker at vi tegner inn n rektangler med bredde Δx mellom grafen til f og x-aksen i intervallet $[0\ ,\ 3]$.

a Forklar at $\Delta x = \frac{3}{n}$, og at høyden av rektangel i er $f(x_{i-1})$,

der $x_i = 0 + i \cdot \frac{3}{n} = \frac{3i}{n}$.

b Vis at det samlede arealet er $\frac{27}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2$.

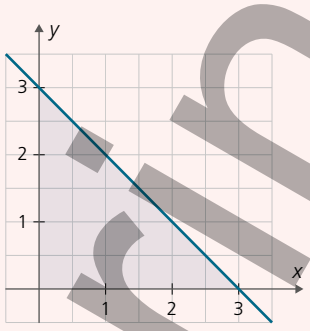
c Vis, ved å la $n \to \infty$, at $\int_0^3 f(x)\,dx = 9$.

Til vurdering

RØDE OPPGAVER

15.13

Bruk figuren til høyre til å finne de bestemte integralene.



a $\int_0^3 (3-x)\,dx$

b $\int_2^3 (3-x)\,dx$

c $\int_1^2 (3-x)\,dx$

15.14

Finn arealet av området avgrenset av

a grafen til funksjonen f gitt ved $f(x) = e^x$, koordinataksene og linja $x = 2$.

b grafen til funksjonen g gitt ved $g(x) = \frac{5}{x}$, x-aksen og linjene $x = 1$ og $x = 3$.

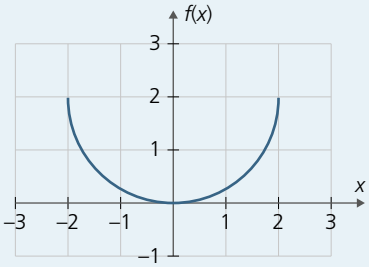
15.15

Lag et program som finner en tilnærmet verdi av arealene i oppgave 15.14a og 15.14b.

BLÅ OPPGAVER

15.16

Figuren viser grafen til funksjonen f gitt ved $f(x) = 2 - \sqrt{4 - x^2}$.



a Finn en tilnærmet verdi for $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$.

b Finn eksakt verdi for $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$.

15.17

La $\{a_n\}$ være følgen gitt ved $a_n = 4n + 2$.

a Marker punktene $(1, a_1)$, $(2, a_2)$, $(3, a_3)$, $(4, a_4)$, $(5, a_5)$ og $(6, a_6)$ i et koordinatsystem.

b Finn summen $\sum_{i=1}^{6} a_i$ og integralet $\int_1^6 (4x + 2)\,dx$.

c Forklar forskjellen på de to svarene i oppgave b.

Til vurdering

15B Numerisk integrasjon

Vi kan derivere en funksjon både analytisk og numerisk. Å derivere analytisk betyr å bruke regneregler og finne eksakte verdier, mens å derivere numerisk betyr å finne tilnærmingsverdier for den deriverte i et punkt. Tilsvarende handler numerisk integrasjon om å finne tilnærmingsverdier for det bestemte integralet. Vi kan bruke programmering til å utføre numerisk integrasjon, og vi kan gjøre dette uansett om funksjonen er gitt ved et funksjonsuttrykk, en graf eller om vi bare kjenner noen funksjonsverdier i en verditabell.

Riemannsummer

Du har sett at vi kan tilnærme det bestemte integralet med trappesummer. Hvis f er en strengt voksende funksjon som er slik at $f(x) \geq 0$ for alle $x \in [a, b]$, fant vi i eksempel 4 at nedre og øvre trappesum er henholdsvis

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}) \cdot \Delta x \quad \text{og} \quad \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x$$

I oppgave 15.12 fant du at hvis funksjonen er strengt avtakende, er det omvendt.

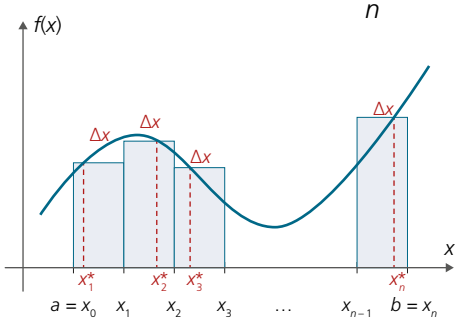
Hvis vi lar x_i^* være et fritt valgt punkt i delintervallet $\left[x_{i-1}, x_i\right]$, kan vi skrive begge disse summene på formen

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*) \cdot \Delta x$$

Denne summen kalles en *riemannsum*, etter den tyske matematikeren Bernhard Riemann (1826–1866).

Riemannsummen tar utgangspunkt i en funksjon f definert i intervallet $[a, b]$. Vi deler intervallet inn i n delintervaller. Bredden av intervallene kan variere, men i forkurset holder vi oss til like brede intervaller med bredde $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$.

I hvert delintervall $\left[x_{i-1}, x_i\right]$ velger vi fritt et punkt x_i^*. Vi kan for eksempel velge den minste x-verdien, den midterste x-verdien eller vi kan velge den x-verdien som gir den minste funksjonsverdien (som i nedre trappesum).



Tilvurdering

Når f er kontinuerlig, er den integrerbar, og vi kan uttrykke det bestemte integralet som grenseverdien til en følge av riemannsummer.

Det bestemte integralet som grenseverdi til en følge av riemannsummer

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\cdot\Delta x, \text{ der } \Delta x = \frac{b-a}{n}$$

Rektangelmetoden

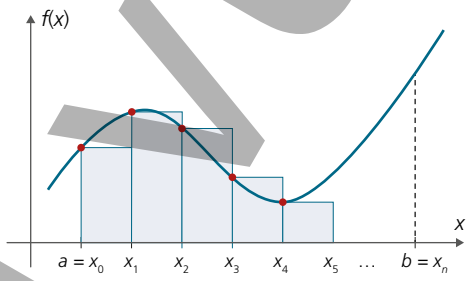
Vi kan finne en god tilnærmingsverdi for et bestemt integral ved å bruke en riemannsum der Δx er svært liten.

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\cdot\Delta x$$

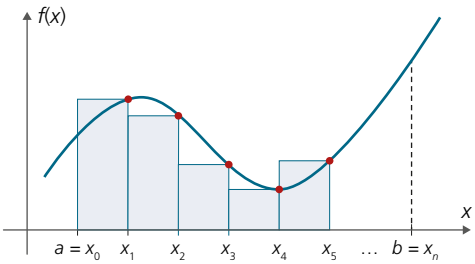
Når bredden av delintervallene er Δx, så er $x_0 = a$, $x_1 = a+\Delta x$ og $x_2 = a+2\cdot\Delta x$. Vi kan altså skrive $x_i = a+i\cdot\Delta x$.

Figurene nedenfor viser hvordan vi i kan velge x_i^* slik at vi gjør en *venstretilnærming* eller en *høyretilnærming*.
I venstretilnærmingen er x_i^* den minste x-verdien i hvert delintervall $\left[x_{i-1}, x_i\right]$, altså $x_i^* = x_{i-1}$.
I høyretilnærmingen er x_i^* den største x-verdien i delintervallet $\left[x_{i-1}, x_i\right]$, altså $x_i^* = x_i$.

Venstretilnærming



Høyretilnærming



Med en venstretilnærming blir riemannsummen

$$f(x_0)\cdot\Delta x + f(x_1)\cdot\Delta x + f(x_2)\cdot\Delta x + \cdots + f(x_{n-1})\cdot\Delta x$$

Med en høyretilnærming blir riemannsummen

$$f(x_1)\cdot\Delta x + f(x_2)\cdot\Delta x + f(x_3)\cdot\Delta x + \cdots + f(x_n)\cdot\Delta x$$

Tilvurdering

Rektangelmetoden med venstretilnærming

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\cdot \Delta x \quad \text{der} \quad x_{i-1} = a + (i-1)\cdot \Delta x$$

Rektangelmetoden med høyretilnærming

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot \Delta x \quad \text{der} \quad x_i = a + i\cdot \Delta x$$

UTFORSK

Forklar hva som er forskjellen på høyre/venstre-tilnærminger og trappesummer. Når er de like, og når er de forskjellige?
Undersøk for eksempel med kommandoene SumUnder, SumOver og VenstreSum for forskjellige funksjoner i GeoGebra.

EKSEMPEL 5

Funksjonen f er gitt ved $f(x) = x^2 - 2x + 2$.

Lag et program som finner en tilnærmingsverdi for integralet $\int_1^5 f(x)\,dx$.

Bruk rektangelmetoden med en venstretilnærming med ti rektangler.

Vi skal finne $\sum_{i=1}^{10} f(x_{i-1})\cdot \Delta x$ i intervallet [1 , 5].

```
a = 1                                   # nedre grense i intervallet
b = 5                                   # øvre grense i intervallet
n = 10                                  # antall rektangler

def f(x):
  return x**2 - 2*x + 2

summen = 0
delta_x = (b - a)/n                     # rektangelbredden

for i in range(n):                       # i fra og med 0 til og med n-1
  summen = summen + f(a + i*delta_x) * delta_x

print(round(summen, 2))
```

Programmet skriver ut **22.24**. Altså er $\int_1^5 f(x)\,dx \approx 22{,}24$.

Tilvurdering

Merk!

Når vi skriver `f(a + i*delta_x)` i for-løkka, kan det se ut som vi gjør en høyretilnærming, men siden løkka starter med $i = 0$, er $f(a)$ den første funksjonsverdien i løkka. Altså er dette en venstretilnærming.

15.18

Ta utgangspunkt i programmet i eksempel 5, og gjør nødvendige endringer slik at du finner

a $\sum_{i=1}^{100} f(x_{i-1}) \cdot \Delta x$ i intervallet [1 , 5]

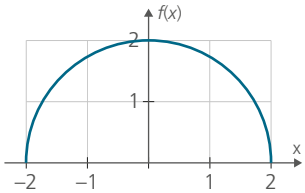
b $\sum_{i=1}^{100} f(x_{i-1}) \cdot \Delta x$ i intervallet [–3 , 1]

c $\sum_{i=1}^{100} f(x_i) \cdot \Delta x$ i intervallet [1 , 5]

d $\int_1^5 f(x)\,dx$ med én desimals nøyaktighet

15.19

Figuren til høyre viser grafen til funksjonen f gitt ved $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$.



a Finn riemannsummen for f i intervallet [–2 , 2] og i intervallet [0 , 2] med en høyretilnærming der $n = 10$.

b Finn riemannsummen for f i intervallet [–2 , 2] og i intervallet [0 , 2] med en venstretilnærming der $n = 10$.

c Sammenlikn svarene i oppgave a og b. Kommenter.

d Lag et program som finner $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$ med én desimals nøyaktighet.

15.20

La I være det bestemte integralet $I = \int_0^1 \sqrt{1 + x^2}\,dx$.

a Finn en tilnærming av I med GeoGebra.

b Finn tilnærmingen av I med rektangelmetoden.

c Hvor stor må n være i oppgave b for at tilnærmingen av I blir riktig med to desimalers nøyaktighet?

SNAKK

Forklar at $\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*) \cdot \Delta x = \Delta x \cdot \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)$.

Hva kan være fordelen med uttrykket på høyre side av likhetstegnet når vi programmerer?

Tilvurdering

EKSEMPEL 6

Funksjonen f har verditabellen:

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
$f(x)$	13,1	16,3	0	8,2	19,7	24,8	28,1	27,3	21,0

Lag et program som finner en tilnærmingsverdi for $\int_0^4 f(x)\,dx$ med en venstretilnærming.

```
# lister med x-verdier og funksjonsverdier
x = [0, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, 4]
f = [13.1, 16.3, 0, 8.2, 19.7, 24.8, 28.1, 27.3, 21.0]

delta_x = x[1] - x[0]  # rektangelbredde
n = len(x)             # antall x-verdier i lista
summen = 0

for i in range(n-1):
  summen = summen + f[i] * delta_x

print(round(summen, 1))
```

Programmet skriver ut **68.8**.

Altså er 68,8 en tilnærmingsverdi for $\int_0^4 f(x)\,dx$.

Merk!

Hvis verditabellen er et datasett i en egen fil, bytter vi ut de tre første linjene i programmet med:

```
from pylab import *
data = loadtxt("verditabell.txt")
x = data[:,0]
f = data[:,1]
```

Filen *verditabell.txt* finner du på Aunivers.no.

15.21

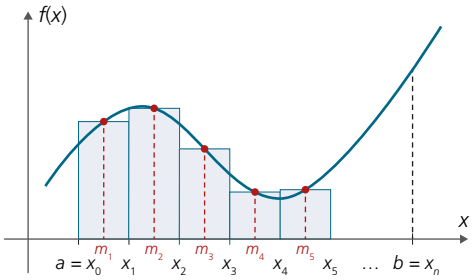
Ta utgangspunkt i funksjonen i eksempel 6.
Gjør endringer i programmet slik at det finner en tilnærmingsverdi for $\int_0^4 f(x)\,dx$ med en høyretilnærming.

Tilvurdering

Midtpunkttilnærming

Hvis vi gjør en tilnærming med en riemannsum der høyden av rektanglene er gitt av den midterste x-verdien i intervallet Δx, sier vi at vi gjør en *midtpunkttilnærming*.

Midtpunkttilnærming



SNAKK

Ta utgangspunkt i figuren ovenfor.
Forklar at summen av arealene på figuren er $\sum_{i=1}^{n} f(m_i) \cdot \Delta x$ der $m_i = a + \left(i - \frac{1}{2}\right) \cdot \Delta x$.

Rektangelmetoden med midtpunkttilnærming

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(m_i) \cdot \Delta x, \text{ der } m_i = a + \left(i - \frac{1}{2}\right) \cdot \Delta x$$

15.22

Ta for deg det bestemte integralet $I = \int_1^5 x^{2x}\,dx$.

a Lag et program som finner integralet med en midtpunkttilnærming med 20 rektangler.

b Sammenlign med resultatet du får ved å bruke en venstretilnærming og en høyretilnærming med 20 rektangler. Kommenter.

15.23

a Finn $\int_{-2}^{2} \sqrt{4 - x^2}\,dx$ med en midtpunkttilnærming og 10 rektangler.

Sammenlign med oppgave 15.19 og kommenter.

b Finn $\int_0^1 \sqrt{1 + x^2}\,dx$ med en midtpunkttilnærming og fire rektangler.

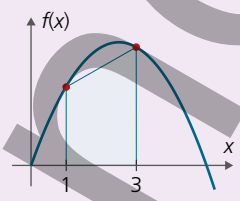
Sammenlign med oppgave 15.20 og kommenter.

Tilvurdering

Trapesmetoden

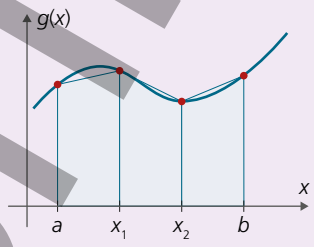
UTFORSK

a Figuren til høyre viser grafen til funksjonen f gitt ved $f(x) = 5x - x^2$.
Forklar at arealet av det lyseblå trapeset er 10.

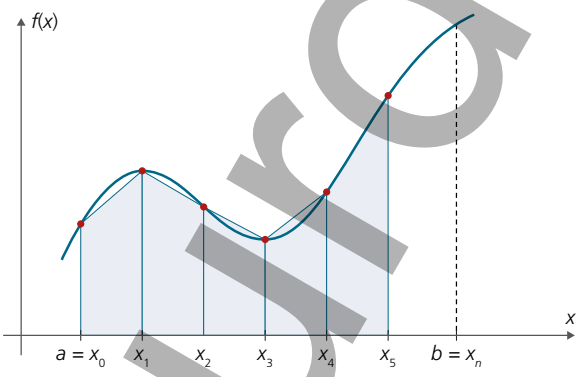


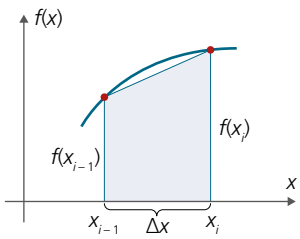
b Figuren til høyre viser grafen til en funksjon g.
De tre lyseblå trapesene har alle bredde Δx.
Bestem et uttrykk for arealet av hvert trapes.
Vis at arealet av hele området er

$$\frac{\Delta x}{2}\big(g(a)+g(b)\big)+2\cdot\big(g(x_1)+g(x_2)\big)$$



Hvis vi tar gjennomsnittet av rektangelarealene vi får med en høyretilnærming og en venstretilnærming, får vi trapeser.





Arealet av trapes nummer i er $T_i = \dfrac{\big(f(x_i)+f(x_{i-1})\big)\Delta x}{2}$.

Når vi summerer n trapeser, får vi arealet T gitt ved:

$$\begin{aligned}
T &= \frac{\big(f(x_0)+f(x_1)\big)\Delta x}{2}+\frac{\big(f(x_1)+f(x_2)\big)\Delta x}{2}+\cdots+\frac{\big(f(x_{n-1})+f(x_n)\big)\Delta x}{2}\\
&= \frac{\Delta x}{2}\Big(\big(f(x_0)+f(x_1)\big)+\big(f(x_1)+f(x_2)\big)+\cdots+\big(f(x_{n-1})+f(x_n)\big)\Big)\\
&= \frac{\Delta x}{2}\big(f(a)+f(x_1)+f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_{n-1})+f(b)\big)\\
&= \frac{\Delta x}{2}\big(f(a)+2\cdot f(x_1)+2\cdot f(x_2)+\cdots+2\cdot f(x_{n-1})+f(b)\big)\\
&= \frac{\Delta x}{2}\Big(f(a)+f(b)+2\cdot\big(f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_{n-1})\big)\Big)\\
&= \frac{\Delta x}{2}\left(f(a)+f(b)+2\cdot\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i)\right)
\end{aligned}$$

$x_0 = a$ og $x_n = b$

Tilvurdering

Trapesmetoden

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{\Delta x}{2}\left(f(a)+f(b)+2\cdot\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right)$$

der $x_i = a + i\cdot\Delta x$

15.24

Funksjonen f er gitt ved tabellen:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$	27	12	0	16	39	51	57	54	43

Bruk trapesmetoden til å finne en tilnærmet verdi for $\int_0^8 f(x)\,dx$.

15.25

La I være det bestemte integralet $I = \int_1^2 \frac{1}{x+x^2}\,dx$.

a Finn I med trapesmetoden med fem delintervaller.

b Finn I med en midtpunkttilnærming med fem delintervaller.

c Finn I med GeoGebra.
Hvilket av svarene i oppgave a og b ligger nærmest det du finner med GeoGebra?

15.26

a Bruk GeoGebra til å vise at $\int_1^e \frac{1}{x}\,dx = 1$ der e er eulertallet.

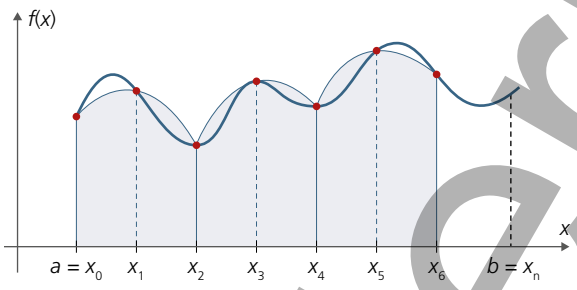
b Lag et program som finner tilnærmingsverdier for $\int_1^{2,7} \frac{1}{x}\,dx$ og $\int_1^{2,8} \frac{1}{x}\,dx$.

Bruk tilstrekkelig nøyaktighet til å vise at $e \in \langle 2{,}7\,,\,2{,}8\rangle$.

Til vurdering

Simpsons metode

Både med rektangelmetoden og trapesmetoden deler vi arealet vi vil beregne, inn i «søyler» med samme bredde. Men «toppen» på søylene er forskjellige avhengig av hvilken metode vi velger. Fordi «toppene» er rette linjer, mens grafer oftest krummer, vil vi alltid få et avvik mellom «toppen» og grafen. Hvis vi har krumme topper, kan vi redusere dette avviket. Simpsons metode er en metode som tilnærmer med parabelbuer i stedet for rette linjer i toppene.



Vi ser på n delintervaller med bredde Δx. Med Simpsons metode må n alltid være et partall. Deretter finner vi parabelbuer gjennom tre og tre punkter på grafen til f.

Det samlede arealet vi finner med Simpsons metode er da

$$\frac{\Delta x}{3}\left(f(a)+4\cdot f(x_1)+2\cdot f(x_2)+4\cdot f(x_3)+2\cdot f(x_4)+\cdots+2\cdot f(x_{n-2})+4\cdot f(x_{n-1})+f(b)\right)$$

der $x_i = a + i\cdot\Delta x$.

Når vi skal lage et program som finner et integral numerisk med Simpsons metode, er det hensiktsmessig å uttrykke formelen ovenfor med summasjonstegn, slik vi har gjort med de andre numeriske metodene.

Simpsons metode

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{\Delta x}{3}\left(f(a)+f(b)+2\cdot\sum_{i=1}^{n-1} f(x_{2i})+4\cdot\sum_{i=1}^{n} f(x_{2i-1})\right)$$

der $x_i = a + i\cdot\Delta x$

Tilvurdering

EKSEMPEL 7

Funksjonen f er gitt ved $f(x) = e^{-x^2}$.
Lag et program som finner en tilnærmingsverdi for integralet $\int_1^5 f(x)\,dx$ med Simpsons metode og ti delintervaller.

```
a = 1                          # nedre grense i intervallet
b = 5                          # øvre grense i intervallet
n = 10                         # antall delintervaller

def f(x):
  return x**2 - 2*x + 2

summen = f(a) + f(b)           # funksjonsverdiene i endepunktene
delta_x = (b - a)/n            # bredden på delintervallene

for i in range(1, n, 2):       # annenhver i fra og med 1 til og med n-1
  summen = summen + 4* f(a + i*delta_x)

for i in range(2, n-1, 2): # annenhver i fra og med 2 til og med n-2
  summen = summen + 2* f(a + i*delta_x)

summen = summen*delta_x/3

print(round(summen, 2))
```

Programmet skriver ut **0.139**.

Altså er $\int_1^5 f(x)\,dx \approx 0{,}139$.

15.27
Vi har gitt integralet $\int_0^3 x^2\,dx$.

Bestem integralet med GeoGebra.
Bestem integralet numerisk med trapesmetoden og med Simpsons metode.
Velg seks delintervaller. Sammenlign.

15.28
Vi har gitt integralet $\int_0^{2\pi} \sin\sqrt{x}\,dx$.

Bestem integralet med GeoGebra.

a Bestem integralet numerisk med trapesmetoden og
1 10 delintervaller **2** 100 delintervaller

b Bestem integralet numerisk med Simpsons metode og
1 10 delintervaller **2** 100 delintervaller

c Sammenlign og kommentar svarene i oppgave b og c.

Tilvurdering

RØDE OPPGAVER

15.29
La I være det bestemte integralet $I = \int_0^1 \sqrt{x}\,dx$.

a Finn en tilnærming for I med GeoGebra.

b Finn en tilnærming for I med rektangelmetoden med 100 rektangler og en
1 venstretilnærming **2** høyretilnærming

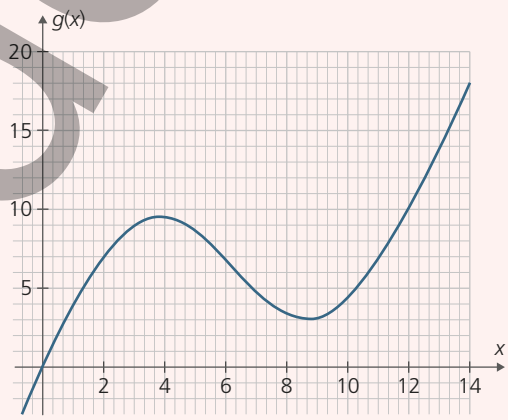
15.30
a Funksjonen f har verditabellen nedenfor.

x	1,00	1,25	1,50	1,75	2,00	2,25	2,50
$f(x)$	3,43	2,17	0,38	1,87	2,65	2,31	1,97

Finn en tilnærmet verdi for $\int_{1,00}^{2,50} f(x)\,dx$ med både høyretilnærming og venstretilnærming.

b Figuren viser grafen til en funksjon g.

Finn en tilnærmet verdi for $\int_0^{12} g(x)\,dx$ ved å bruke en numerisk integrasjonsmetode.



BLÅ OPPGAVER

15.31
Ta utgangspunkt i programmet i eksempel 5 på side 000. Finn summen ved å erstatte for-løkka i programmet med en while-løkke.

15.32
I en lærebok står det at $\pi = \int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\,dx$.

Bruk numerisk integrasjon til å vise at dette stemmer.

15.33
Lag et program som bestemmer b slik at $\int_0^b \frac{100}{1+2e^{-0,05x}}\,dx = 9999$.

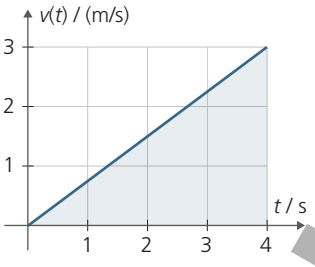
Kontroller svaret med GeoGebra.

Til vurdering

15C Bruk av det bestemte integralet

Tolkning av arealet av området under en graf

Nedenfor ser du fartsgrafen for en gjenstand som øker farten jevnt fra null til 3 m/s i løpet av fire sekunder.



Arealet under grafen har form som en trekant.
Vi regner med enheter og får at arealet under grafen er $\frac{1}{2} \cdot 4\text{ s} \cdot 3\text{ m/s} = 6\text{ m}$.

Arealet har enheten meter, og dette betyr at gjenstanden har beveget seg 6 m i løpet av de fire sekundene bevegelsen pågikk.
Også når fartsgrafen ikke er lineær, vil arealet ha enheten $\text{s} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}} = \text{m}$.

Nøkkelen til en tolkning av arealet under en graf ligger altså i enhetene på aksene.

> Arealet av området under en graf har samme enhet som produktet av enhetene på aksene.

Tilvurdering

EKSEMPEL 8

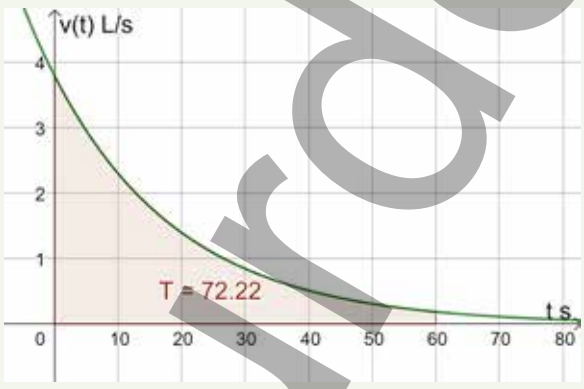
Vann renner ut fra et akvarium.
En modell for vannmengden som renner ut per sekund, er gitt ved $v(t) = 3{,}8 \cdot e^{-0{,}05t}$.
$v(t)$ er antall liter per sekund og t er tiden i sekunder, regnet fra utstrømningen startet.
Hvor mye vann renner ut i løpet av det første minuttet?

Arealet av området under grafen til v har enheten $\text{s} \cdot \frac{\text{L}}{\text{s}} = \text{L}$.

Den totale vannmengden T som renner ut i løpet av 1 minutt = 60 sekunder, er derfor arealet av området avgrenset av grafen til v, t-aksen og linjene $t = 0$ og $t = 60$.

Altså er $T = \int_0^{60} 3{,}8 \cdot e^{-0{,}05t}\, dt$.

Vi tegner grafen til v i GeoGebra, og bruker kommandoen T=Integral(v, 0, 60).



I løpet av det første minuttet renner det ut 72 L vann.

15.34
Nanna hopper i sjøen fra 10-meteren. Farten målt i meter per sekund under hoppet er gitt ved $v(t) = 9{,}8t$, der t er tiden målt i sekunder.

Bestem $\int_0^1 v(t)\, dt$.

Hva forteller svaret?

Tilvurdering

15.35

Lars stikker hull i bunnen av en vanntank slik at den begynner å lekke. Etter t minutter renner det ut $V(t)$ liter vann per minutt. En modell for vannutstrømningen er gitt ved

$$V(t) = 2{,}55 \cdot 0{,}88^t$$

a Tegn grafen til v for $t \geq 0$.
b Hva er enheten til arealet av området under grafen?
c Hvor mye vann renner ut i løpet av de første 10 minuttene?
d Omtrent hvor mye vann var det i tanken?

15.36

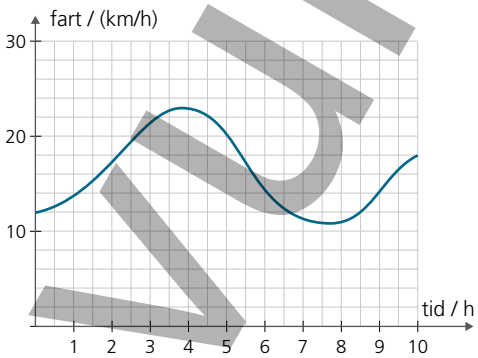
Forsøk har vist at når en regndråpe faller i luft, vil en modell for farten til regndråpen være gitt ved

$$v(t) = 9{,}5 \cdot \left(1 - e^{-1{,}6t}\right)$$

Farten er målt i m/s, og t er tiden målt i sekunder.
a Hvor langt faller regndråpen i løpet av det første sekundet?
b Hvor langt faller dråpen i løpet av det tredje sekundet?
c Hvor langt faller dråpen i løpet av det femte sekundet?
d Hva forteller svarene i oppgavene a–c om farten?

15.37

Grafen viser farten til en ubåt i en periode på 10 timer.



Omtrent hvor lang strekning tilbakelegger ubåten i løpet av disse 10 timene?

Til vurdering

15.38

I 2011 var utslippet av karbondioksid (CO_2) til en bedrift 111 tonn. Bedriften reduserte fra og med 2012 det årlige utslippet av karbondioksid (CO_2) med 4 % i forhold til året før.

a Forklar at funksjonen f gitt $f(x) = 111 \cdot 0{,}96^x$ er en modell for det årlige utslippet x år etter 2011.

b Vis ved integrasjon at det samlede utslippet til bedriften i årene 2011–2021 var 911 tonn.

c Forklar at det samlede utslippet i perioden 2011–2021 også danner en geometrisk rekke med elleve ledd, der $a_1 = 111$ og $k = 0{,}96$.
Vis at det samlede utslippet i dette tilfellet blir 1004 tonn.

d Hva er grunnen til at det samlede utslippet blir forskjellig i oppgave b og c?

Merk!

Vi kan finne et bestemt integral tilnærmet ved å bruke summen av en rekke, og vi kan finne summen av rekke tilnærmet ved å bruke et bestemt integral.
I mange praktiske eksempler kan vi selv velge metode, resultatet blir uansett tilstrekkelig godt.

15.39

Elin måler kraften som virker på en bordtennisball i den tiden den er i kontakt med rekkerten. Tabellen er et utdrag av datasettet hennes.

Tid *t* (ms)	0,0	2,0	4,0	6,0	8,0	10,0
Kraft *F*(*t*) (N)	0,1	9,3	15,8	15,7	8,8	0,2

Fra fysikken vet Elin at impulsen I på bordtennisballen er integralet av kraften F med hensyn på tiden t:

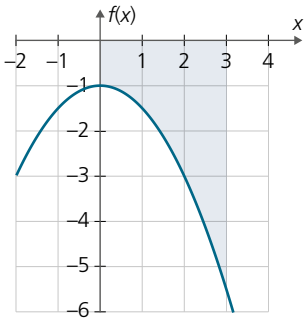
$$I = \int_a^b F(t)\,dt$$

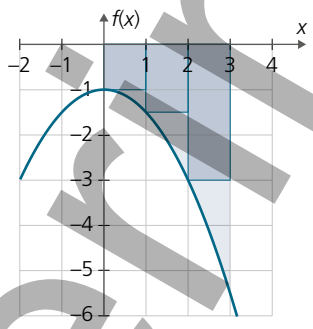
Bestem numerisk omtrent hvor stor impuls bordtennisballen fikk i løpet av de 10 millisekundene den var i kontakt med rekkerten?

Til vurdering

Areal av et område under *x*-aksen

Figuren viser grafen til en funksjon *f* som sammen med *x*-aksen og linjene $x = 0$ og $x = 3$ avgrenser et område. Fordi grafen til *f* ligger *under* *x*-aksen i intervallet [0 , 3], ligger også det avgrensede området under *x*-aksen.





I kapittel 15A fant vi arealer av områder mellom en graf og *x*-aksen med utgangspunkt i trappesummer.
I kapittel 15B generaliserte vi disse til riemannsummen $\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*) \cdot \Delta x$.

Når området, som her, ligger under *x*-aksen, er alle funksjonsverdiene $f(x_i^*)$ negative.

Følgelig blir også summen $\sum_{i=1}^{3} f(x_i^*) \cdot \Delta x$ negativ, og dermed blir integralet $\int_0^3 f(x)\,dx$ negativt.
Arealet av området er positivt og har samme absoluttverdi som $\int_0^3 f(x)\,dx$.
Arealet er lik $-\int_0^3 f(x)\,dx$.

La *A* være arealet av området avgrenset av grafen til den kontinuerlige funksjonen *f*, *x*-aksen og linjene $x = a$ og $x = b$.

$A = \int_a^b f(x)\,dx$ hvis området ligger over *x*-aksen.

$A = -\int_a^b f(x)\,dx$ hvis området ligger under *x*-aksen.

Hvis området ligger delvis over og delvis under *x*-aksen, må vi dele det opp i flere deler og summere delarealene.

Tilvurdering

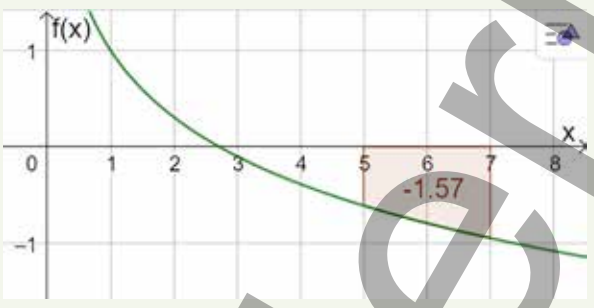
EKSEMPEL 9

Funksjonen f er gitt ved $f(x) = 1 - \ln x$.
Finn arealet av området avgrenset av grafen til f, x-aksen og linjene

a $x = 5$ og $x = 7$

b $x = 1$ og $x = 7$

a Vi tegner grafen til f i GeoGebra, og merker oss at hele området ligger under x-aksen. Vi bruker så kommandoen Integral(f,5,7).



Området er markert og har arealet 1,57.

b Vi ser av grafen til f at skjæringspunktet med x-aksen deler området i to deler, én del som ligger over og én del som ligger under x-aksen. Vi må derfor finne arealene hver for seg.
Kommandoen N=Nullpunkt(f,1,7) gir skjæringspunktet N.
Vi bruker så kommandoene Integral(f,1,x(N)) og Integral(f,x(N),7).

Området er markert og har arealet $0{,}72 + 2{,}34 = 3{,}06$.

Merk!
Hvis vi i eksempel 9b ikke deler området i to, får vi $\int_1^7 f(x)\,dx = -1{,}62$.
Det er fordi $0{,}72 + (-2{,}34) = -1{,}62$.

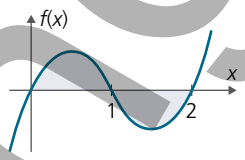
Til vurdering

15.40

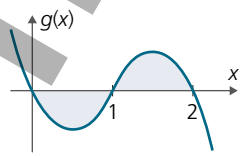
a Hvilket av uttrykkene gir arealet av det markerte området på figuren til høyre?

1 $\int_0^2 f(x)\,dx$ **2** $\int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^2 f(x)\,dx$

3 $\int_0^1 f(x)\,dx - \int_1^2 f(x)\,dx$ **4** $\int_1^2 f(x)\,dx - \int_0^1 f(x)\,dx$



b La $g(x) = -f(x)$. Finn et uttrykk for arealet av det markerte området på figuren til høyre, uttrykt ved $f(x)$.



15.41

Funksjonen f er gitt ved $f(x) = x^2 - 2x$.

a Begrunn at det bestemte integralet $\int_0^2 (x^2 - 2x)\,dx$ er negativt.

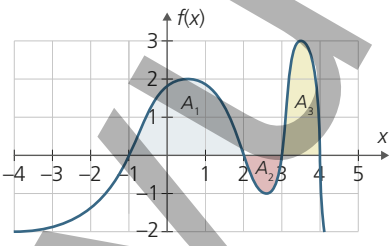
b Finn arealet av området som er avgrenset av grafen til f, koordinataksene og linja $x = 4$.

15.42

Finn arealet av flatestykket som er avgrenset av x-aksen og grafen til funksjonen f gitt ved $f(x) = x^2 - 6x + 8$.

15.43

På figuren nedenfor er tre områder markert.



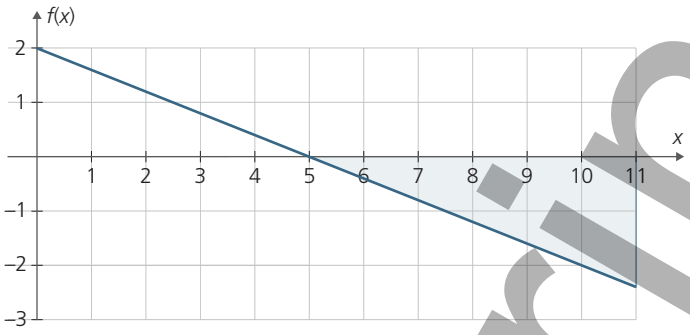
Arealet av områdene er $A_1 = 4{,}8$, $A_2 = 0{,}8$ og $A_3 = 2$.

Bestem $\int_{-2}^{4} f(x)\,dx$.

Tilvurdering

15.44

På figuren ser du grafen til en funksjon f, der $D_f = [0, \rightarrow\rangle$.



a Bestem arealet av det markerte området.

b Bestem $\int_5^{10} f(t)\,dt$ og $\int_0^{10} f(t)\,dt$.

c Bestem b slik at $\int_4^b f(t)\,dt = 0$.

d Bestem b slik at $\int_0^b f(t)\,dt$ blir størst mulig.

15.45

Funksjonen v gitt ved

$$v(t) = (t-4)^2 \cdot e^{-0,2t} - 3$$

er en modell for *netto vanntilsig* til et vannmagasin. Netto vanntilsig er differansen mellom vannet som renner inn i magasinet og det som renner ut. Vanntilsiget $v(t)$ er målt i m^3 per døgn og t er tiden målt i døgn. Modellen gjelder for $0 \le t \le 30$.

a Tegn grafen til v.

b Når var netto vanntilsig lik null?

c **1** Når var det mest vann i magasinet?

2 Hvor mye mer vann var det da i magasinet enn det var ved tiden $t = 0$?

d **1** Når var det minst vann i magasinet?

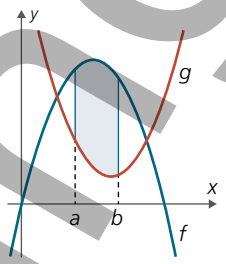
2 Hvor mye mindre vann var det da i magasinet enn det var ved tiden $t = 0$?

Til vurdering

Areal av området mellom to grafer

Hvis $f(x) \geq g(x)$ for $x \in [a, b]$,
er arealet av området avgrenset av grafene til f og g, og linjene $x = a$ og $x = b$ gitt ved

$$A = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$



15.46
Funksjonene f og g er gitt ved $f(x) = 6x - x^2$ og $g(x) = 8 - x$. Bestem arealet av området som er avgrenset av grafene til f og g, linjene $x = 2$ og $x = 5$.

15.47
Funksjonene f og g er gitt ved $f(x) = x^2 - 4x + 5$ og $g(x) = -x^2 + 4x - 1$.

a Finn skjæringspunktene mellom grafene til f og g.

b Finn arealet av flatestykket som er avgrenset av grafene til f og g.

15.48
Funksjonene f og g er gitt ved $f(x) = -x^2 + 4x$ og $g(x) = x^2 - 5x + 7$.
Bestem

a $\int_1^3 f(x)\,dx - \int_1^3 g(x)\,dx$

b $\int_1^3 [f(x) - g(x)]\,dx$

c $\int_1^3 g(x)\,dx - \int_1^3 f(x)\,dx$

d $\int_1^3 [g(x) - f(x)]\,dx$

e Kommenter svarene i oppgave a–d.

SNAKK

Argumenter for om påstandene er sanne eller u sanne.

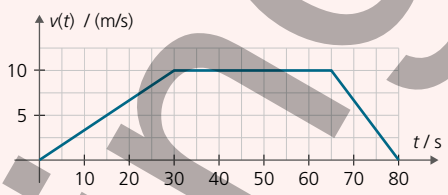
- $\int_a^b f(x)\,dx$ er lik arealet av området mellom grafen til f og x-aksen fra $x = a$ til $x = b$.
- $\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$ er lik arealet av området mellom grafene til f og g fra $x = a$ til $x = b$.
- Hvis $f(x) = g(x)$, er $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$.
- Hvis $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$, er $f(x) = g(x)$.

Til vurdering

RØDE OPPGAVER

15.49

Grafen på figuren viser hvordan farten v til Gunnar varierer med tiden t på en liten prøvetur med sykkelen.



a Finn $\int_0^{30} v(t)\,dt$. Hva forteller svaret?

b Finn $\int_0^{80} v(t)\,dt$. Hva forteller svaret?

15.50

Funksjonen f er gitt ved $f(x) = x^3$.

a Finn arealet av området som er avgrenset av grafen til f, x-aksen og linjene $x = -2$ og $x = 2$.

b Finn $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$. Kommenter svaret.

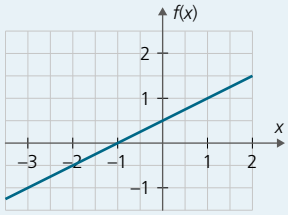
15.51

Finn alle verdier for $b > 0$ slik at $\int_0^b \sin \pi x\,dx = 0$. Kommenter.

BLÅ OPPGAVER

15.52

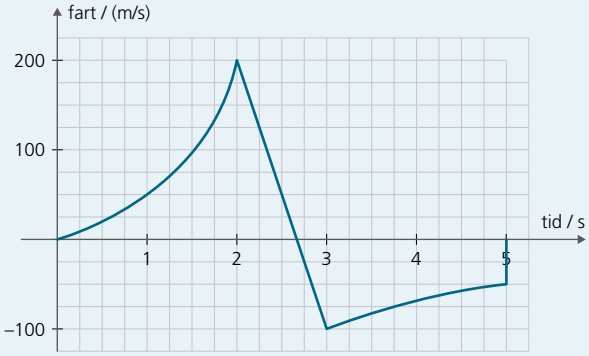
Bruk figuren til høyre til å bestemme k slik at



a $\int_{-3}^{k} f(x)\,dx = 0$ **b** $\int_{k}^{0} f(x)\,dx = 0$ **c** $\int_{-3}^{k} f(x)\,dx = \frac{5}{4}$

15.53

Figuren til høyre viser fartsgrafen til en rakett som ble skutt opp.



a Ved hvilket tidspunkt var raketten på sitt høyeste?

b Bruk figuren til å gjøre et overslag for hvor lang strekning raketten tilbakelegger.

c Hent filen *rakett.txt* på Aunivers.no. Filen inneholder fartsdata for en tilsvarende rakett. Lag et program som finner strekningen denne raketten tilbakelegger.

Tilvurdering

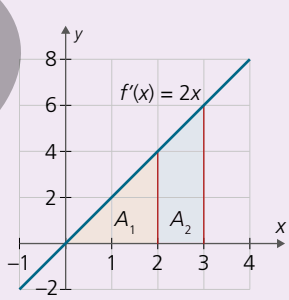
15D Analysens fundamentalteorem

Analyse er den delen av matematikken som handler om funksjoner, deres egenskaper, deriverte og integrerte. Vi kaller det også funksjonsanalyse. Analysens fundamentalteorem er en grunnleggende setning i denne delen av matematikken.

Det ubestemte integralet

UTFORSK

Figuren til høyre viser grafen til *den deriverte f'* av en funksjon *f*. To områder med areal A_1 og A_2 er markert mellom grafen til *f'* og førsteaksen.



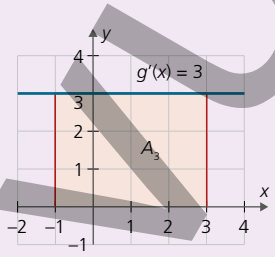
a Hvor store er arealene A_1 og A_2?

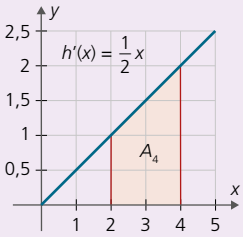
b Bestem tre mulige funksjonsuttrykk *f*(*x*), og bestem *f*(0) og *f*(2) i alle de tre tilfellene.

c Hvilken sammenheng ser det ut til å være mellom A_1, *f*(0) og *f*(2) i de tre tilfellene?

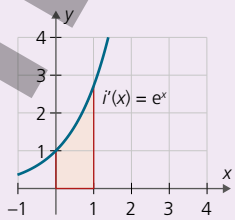
d Finner du tilsvarende sammenheng mellom A_2, *f*(2) og *f*(3)?

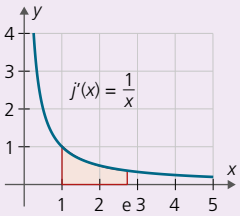
e Figurene nedenfor viser grafene til to deriverte funksjoner, *g'* og *h'*. Undersøk om sammenhengen du fant i oppgave c, også gjelder i disse to tilfellene.





Bruk sammenhengen du har funnet, til å bestemme den eksakte størrelsen av arealet markert under grafen til $i'(x) = e^x$ og $j'(x) = \frac{1}{x}$.





Tilvurdering

Når du i Utforsk på forrige side leter etter $f(x)$ når du kjenner $f'(x)$, så *antideriverer* du f'.
x^2 er én antiderivert av $2x$.

Men x^2 er ikke den eneste antideriverte av $2x$.
Hvis vi deriverer x^2+5, x^2-8 eller $x^2+\sqrt{3}$, får vi også $2x$.
Det er fordi den deriverte av et konstant ledd er 0.

Generelt kan vi skrive $(x^2+C)' = 2x$, når $C \in \mathbb{R}$.
Vi sier at x^2+C er alle antideriverte funksjoner av $2x$.

Å finne funksjonsuttrykket for en funksjon når vi kjenner uttrykket for den deriverte, kaller vi antiderivasjon.

Hvis f er gitt ved $f(x) = 2x$, er én antiderivert funksjon gitt ved $K(x) = x^2$.

> Hvis $K'(x) = f(x)$, sier vi at K er én antiderivert av f.
> Alle antideriverte av f er da gitt ved $K(x)+C$, der $C \in \mathbb{R}$.

Når vi antideriverer en funksjon, sier vi også at vi *integrerer* funksjonen.

For eksempel skriver vi $\int 2x\,dx = x^2 + C$.

Dette er det *ubestemte integralet* av $2x$.
Her er $2x$ integranden, uttrykket som skal antideriveres.
C kaller vi *integrasjonskonstanten*.
Det ubestemte integralet av funksjonen f er alle antideriverte til f.

> Det ubestemte integralet
>
> $$\int f(x)\,dx = K(x)+C, \text{ der } K'(x) = f(x) \text{ og } C \in \mathbb{R}$$

Merk!
Når vi deriverer svaret på et ubestemt integral, skal vi få integranden.
Dette kan vi bruke som kontroll på at vi har integrert riktig.

Tilvurdering

EKSEMPEL 10

Finn det ubestemte integralet.

a $\int 4x\,dx$ **b** $\int 3\,dx$ **c** $\int 3\,dt$

a Vi skal finne de antideriverte av $4x$.
Ettersom $\left(2x^2\right)' = 4x$, får vi at $\int 4x\,dx = 2x^2 + C$.

b Vi skal finne de antideriverte av 3 når x er variabelen.

$$\int 3\,dx = 3x + C$$

c Vi skal finne de antideriverte av 3 når t er variabelen.

$$\int 3\,dt = 3t + C$$

15.54
Finn det ubestemte integralet.
a $\int 5\,dx$ **b** $\int 5\,dt$ **c** $\int 6x\,dx$ **d** $\int dx$

15.55
Finn det ubestemte integralet.
a $\int -2\,dx$ **b** $\int 0\,dx$ **c** $\int 2\pi\,dr$ **d** $\int 2\pi r\,dr$

15.56
a Vis ved derivasjon at $x^3 + 6x$ er en antiderivert av $3x^2 + 6$.
b Finn det ubestemte integralet.
1 $\int \left(3x^2 + 6\right) dx$ **2** $\int \left(3t^2 + 6\right) dt$ **3** $\int \left(tx^2 + 6\right) dx$

15.57
Funksjonen f er gitt ved $f(x) = e^{3x}$.
a Bestem $f'(x)$.
b Finn alle antideriverte $K(x)$ til $f(x)$.

15.58
Posisjonen til en gjenstand som beveger seg langs en rett linje, er gitt ved $s(t)$.
Da er farten $v(t) = s'(t)$, og akselerasjonen $a(t) = v'(t)$.
a Formuler sammenhengen mellom fart og posisjon som et ubestemt integral.
b Formuler sammenhengen mellom akselerasjon og fart som et ubestemt integral.
c Ved fritt fall er akselerasjonen konstant lik 9,81 m/s^2, det vil si $a(t) = 9{,}81$.
1 Bruk integrasjon til å finne et uttrykk for $v(t)$.
2 Hvilken praktisk tolkning har integrasjonskonstanten her?

Til vurdering

Integrasjonsregler

En stor oppdagelse i matematikkens historie er at integrasjon og derivasjon er omvendte regneoperasjoner og at vi derfor kan bruke antiderivasjon til å beregne bestemte integraler.
Ikke alle funksjoner har en antiderivert. Da må vi tilnærme bestemte integraler numerisk. Et eksempel er funksjonen f gitt ved $f(x) = e^{-x^2}$.

Fordi de fleste funksjoner har en antiderivert, handler integrasjon ofte om å *gjenkjenne* deriverte funksjoner. Etter hvert som funksjonene blir mer kompliserte, får vi behov for integrasjonsregler.
Vi vet at en konstant faktor står uendret når vi deriverer, og at vi deriverer et flerleddet uttrykk ledd for ledd. Tilsvarende regler gjelder for integrasjon.

- En konstant faktor står uendret når vi integrerer.
- Et flerleddet uttrykk integrerer vi ledd for ledd.

$$\int k \cdot u(x)\,\mathrm{d}x = k\int u(x)\,\mathrm{d}x \qquad (k \in \mathbb{R})$$

$$\int (u(x) \pm v(x))\,\mathrm{d}x = \int u(x)\,\mathrm{d}x \pm \int v(x)\,\mathrm{d}x$$

Videre kan vi tenke oss fram til noen integrasjonsregler ut fra derivasjonsreglene.

Potensfunksjoner

Når vi deriverer potensfunksjoner, *minker* eksponenten med 1: $\left(x^r\right)' = rx^{r-1}$
Når vi antideriverer x^2, er det derfor naturlig å *øke* eksponenten med 1.
Altså er x^3 nærliggende.
Men når vi deriverer x^3, får vi $3x^2$.
Vi får en faktor 3 som ikke skal være der. Det kan vi korrigere ved å multiplisere med $\frac{1}{3}$. Altså får vi at

$$\int x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3 + C$$

På tilsvarende måte får vi at

$$\int x^3\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}x^4 + C$$

Generelt får vi integrasjonsregelen nedenfor, som gjelder for alle reelle eksponenter bortsett fra –1:

$$\int x^r\,\mathrm{d}x = \frac{1}{r+1}x^{r+1} + C \qquad (r \neq -1)$$

Tilvurdering

SNAKK

Forklar hvorfor integrasjonsregelen for potensfunksjoner ikke gjelder for $r = -1$.

Hvis $r = -1$, må vi finne den antideriverte på en annen måte.

I dette tilfellet er $x^r = x^{-1} = \frac{1}{x}$.

Vi vet at $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ for $x > 0$.

Når $x < 0$, er tallet $-x$ positivt. Da er $\ln(-x)$ definert, og ved kjerneregelen får vi

$$\left(\ln(-x)\right)' = \frac{1}{-x} \cdot (-x)' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}.$$

Ved hjelp av absoluttverditegnet kan vi formulere denne regelen:

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C \qquad (x \neq 0)$$

EKSEMPEL 11

Finn det ubestemte integralet.

a $\int \left(8x^3 + \frac{5}{x}\right) dx$ **b** $\int \left(3\sqrt{x} - \frac{1}{x^3}\right) dx$

a Vi integrerer ledd for ledd og setter konstante faktorer utenfor integralene.

$$\begin{aligned}\int \left(8x^3 + \frac{5}{x}\right) dx &= 8\int x^3\,dx + 5\int \frac{1}{x}\,dx \\ &= 8 \cdot \frac{1}{3+1} x^{3+1} + 5 \cdot \ln|x| + C \\ &= 2x^4 + 5\ln|x| + C\end{aligned}$$

Vi får én integrasjonskonstant for hvert integral. C er summen av disse.

b Vi skriver om til potenser og får

$$\begin{aligned}\int \left(3\sqrt{x} - \frac{1}{x^3}\right) dx &= \int \left(3x^{\frac{1}{2}} - x^{-3}\right) dx \\ &= 3\int x^{\frac{1}{2}}\,dx - \int x^{-3}\,dx \\ &= 3 \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}+1} x^{\frac{1}{2}+1} - \frac{1}{-3+1} x^{-3+1} + C \\ &= \frac{3}{\frac{3}{2}} x^{\frac{3}{2}} - \left(-\frac{1}{2}\right) x^{-2} + C \\ &= 2\sqrt{x^3} + \frac{1}{2x^2} + C\end{aligned}$$

$x^{\frac{3}{2}} = \sqrt{x^3} = x\sqrt{x}$

Til vurdering

15.59
Finn det ubestemte integralet.

a $\int\left(x^6+6x^2\right)\mathrm{d}x$ **b** $\int\left(4x^3+9x^2-8x+1\right)\mathrm{d}x$ **c** $\int\frac{2}{x^2}\,\mathrm{d}x$

d $\int\frac{2}{x}\,\mathrm{d}x$ **e** $\int\frac{1}{3x}\,\mathrm{d}x$ **f** $\int\left(4+6\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x$

15.60
Forklar forskjellen på integralene

1 $\int\frac{1}{ax}\,\mathrm{d}x$, når $a\neq 0$ **2** $\int\frac{1}{ax}\,\mathrm{d}a$, når $x\neq 0$

15.61
En funksjon f er gitt ved $f(x)=\frac{x^2+2}{x}$.

a Vis at funksjonsuttrykket kan omformes til $f(x)=x+\frac{2}{x}$.
b Bestem $\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

SNAKK

Med derivasjonsregelen for potenser viste vi i kapittel 8 at

$$\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{og} \quad \left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$$

Bruk dette til å finne den antideriverte til funksjonen gitt ved

a $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ **b** $g(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ **c** $h(x)=-\frac{1}{x^2}$ **d** $i(x)=\frac{3}{x^2}$

Eksponentialfunksjoner

Den naturlige eksponentialfunksjonen er sin egen deriverte: $\left(\mathrm{e}^x\right)'=\mathrm{e}^x$.
Det gir denne integrasjonsregelen:

$$\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+C$$

Men hva blir $\int \mathrm{e}^{kx}\,\mathrm{d}x$, der k er en konstant?
Vi undersøker først om e^{kx} er en antiderivert.
Vi bruker kjerneregelen og deriverer: $\left(\mathrm{e}^{kx}\right)'=\mathrm{e}^{kx}\cdot(kx)'=\mathrm{e}^{kx}\cdot k=k\mathrm{e}^{kx}$
Vi får en faktor k som ikke skal være der.
Det kan vi korrigere ved å multiplisere med $\frac{1}{k}$.

$\frac{1}{k}\mathrm{e}^{kx}$ er derfor en antiderivert av e^{kx}.

$\left(a^x\right)'=\ln a\cdot a^x$. Derfor er $\frac{a^x}{\ln a}$ en antiderivert av a^x.

Til vurdering

$$\int e^{kx}\,dx = \frac{1}{k}e^{kx} + C \qquad (k \neq 0)$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \qquad (a > 0\,,\ a \neq 1)$$

EKSEMPEL 12

Finn $\int\left(10e^{5x} - 2e^{-x}\right)dx$.

Vi integrerer ledd for ledd og setter konstante faktorer utenfor integralene.

$$\begin{aligned}\int\left(10e^{5x} - 2e^{-x}\right)dx &= 10\int e^{5x}\,dx - 2\int e^{-x}\,dx\\ &= 10\cdot\frac{1}{5}\cdot e^{5x} - 2\cdot\frac{1}{-1}\cdot e^{-x} + C\\ &= 2e^{5x} + 2e^{-x} + C\end{aligned}$$

15.62

Finn det ubestemte integralet.

a $\int e^{6x}\,dx$ **b** $\int(6e^{2x} + e^{-x})\,dx$ **c** $\int 3^x\,dx$ **d** $\int\frac{3^x}{3}\,dx$

15.63

Finn det ubestemte integralet.

a $\int\left(e^{\frac{1}{2}x} + e^{\frac{x}{3}}\right)dx$ **b** $\int e^{2t}\,dt$ **c** $\int\frac{e^{2t}}{2}\,dt$ **d** $\int\left(1 - 4e^{-t}\right)dt$

15.64

a Finn $f'(x)$ når $f(x) = e^{x^3}$.

b Bruk resultatet i oppgave a til å finne $\int x^2e^{x^3}\,dx$.

Integrasjon av trigonometriske funksjoner

Vi antideriverer $\sin x$ og $\cos x$. Da får vi integrasjonsreglene:

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

SNAKK

Forklar at integrasjonsreglene nedenfor stemmer når $k \neq 0$ er en konstant.

$$\int \sin kx\,dx = -\frac{1}{k}\cos kx + C \quad \text{og} \quad \int \cos kx\,dx = \frac{1}{k}\sin kx + C$$

Tilvurdering

EKSEMPEL 13

Finn $\int\left(\cos\frac{x}{2} - 3\sin 3x\right)dx$.

Vi integrerer ledd for ledd.

$$\begin{aligned}\int\left(\cos\frac{x}{2} - 3\sin 3x\right)dx &= \int\cos\frac{x}{2}\,dx - 3\int\sin 3x\,dx\\ &= \frac{1}{\frac{1}{2}}\sin\frac{x}{2} - 3\cdot\left(-\frac{1}{3}\cos 3x\right) + C\\ &= 2\sin\frac{x}{2} + \cos 3x + C\end{aligned}$$

15.65

Finn det ubestemte integralet.

a $\int\sin 2x\,dx$

b $\int 4\cos 2x\,dx$

c $\int 3\cdot\sin\frac{1}{3}x\,dx$

d $\int\cos\frac{x}{5}\,dx$

e $\int\left(\sin\frac{x}{6} + e^{\frac{x}{6}}\right)dx$

f $\int\left(\sqrt{2}\cdot\sin\frac{\pi}{6}\cdot\cos\frac{x}{\sqrt{2}}\right)dx$

$$\int\tan x\,dx = -\ln|\cos x| + C$$

Merk!

Senere i kapitlet kan du bruke definisjonen av tangens til å vise at denne regelen stemmer.

15.66

a Finn det ubestemte integralet.

1 $\int\tan 2x\,dx$

2 $\int\tan\frac{x}{2}\,dx$

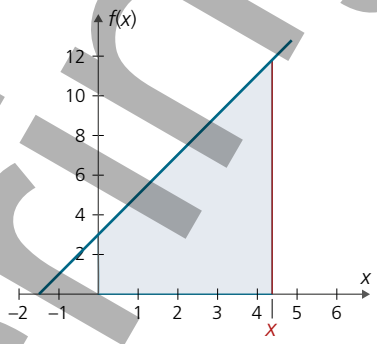
b Bruk derivasjonsregelen $(\tan x)' = 1 + \tan^2 x$ til å finne det ubestemte integralet $\int\tan^2 x\,dx$.

Til vurdering

Bestemt integrasjon ved antiderivasjon

I Utforsk på side 000 antydet vi en sammenheng mellom det bestemte integralet og den antideriverte. Vi skal se nærmere på dette.

På figuren til høyre har vi tegnet grafen til funksjonen f gitt ved $f(x) = 2x + 3$.
Vi skal regne ut arealet av området mellom grafen og x-aksen fra $x = 0$ til en vilkårlig x-verdi større enn 0.



Det avgrensede flatestykket er et trapes. Lengden av de parallelle sidene er $f(0)$ og $f(x)$, og avstanden mellom dem er x.
Formelen for arealet av et trapes gir at arealfunksjonen F er gitt ved

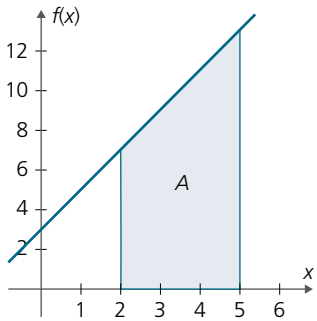
$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{(f(0) + f(x)) \cdot x}{2} \\ &= \frac{(3 + 2x + 3) \cdot x}{2} \\ &= x^2 + 3x \end{aligned}$$

For eksempel er $F(2) = 10$ arealet fra $x = 0$ til $x = 2$, og $F(5) = 40$ er arealet fra $x = 0$ til $x = 5$.

Arealet av det markerte området på figuren til høyre er derfor $A = F(5) - F(2) = 40 - 10 = 30$.

Fra underkapittel 15A vet vi at $A = \int_2^5 f(x)\,dx$.

Altså er $\int_2^5 f(x)\,dx = F(5) - F(2)$.



Legg merke til at $F'(x) = f(x)$. Det betyr at arealfunksjonen F er en antiderivert av f.

Denne sammenhengen gjelder generelt, og vi kaller den *analysens fundamentalteorem*. Den ble bevist for over 300 år siden av Isaac Newton og Gottfried Wilhelm Leibniz.
Til slutt i delkapitlet viser vi ideen i beviset for analysens fundamentalteorem.

Tilvurdering

La F være en antiderivert av f slik at $K'(x) = f(x)$. Da er

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [K(x)]_a^b = K(b) - K(a)$$

Her er $[K(x)]_a^b$ en forkortet skrivemåte for $K(b) - K(a)$.

Merk!
Det er vanlig å velge den enklest mulige antiderivierte $K(x)$, altså den hvor $C = 0$. Det er fordi C uansett faller bort i utregningen $K(b) - K(a)$.

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &= [K(x) + C]_a^b \\ &= K(b) + C - (K(a) + C) \\ &= K(b) + C - K(a) - C \\ &= K(b) - K(a) \\ &= [K(x)]_a^b\end{aligned}$$

EKSEMPEL 14

Funksjonen f er gitt ved $f(x) = 2\cos\frac{\pi}{2}x$.

a Bestem $\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x$.

b Finn arealet av området avgrenset av grafen til f, x-aksen og linjene $x = 0$ og $x = 3$.

a

$$\begin{aligned}\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^3 2\cos\frac{\pi}{2}x\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{4}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}x\right]_0^3 \\ &= \frac{4}{\pi}\cdot\sin\frac{3\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\cdot\sin 0 \\ &= -\frac{4}{\pi}\end{aligned}$$

Til vurdering

b For å finne ut om området ligger delvis over og delvis under x-aksen, undersøker vi om f har nullpunkter. Vi løser likningen $f(x) = 0$ for $x \in \langle 0, 3 \rangle$. Da er

$$\cos\frac{\pi}{2}x = 0$$

$$\frac{\pi}{2}x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \quad \vee \quad \frac{\pi}{2}x = \frac{3\pi}{2} + k2\pi$$

$$x = 1 + 4k \quad \vee \quad x = 3 + 4k$$

$$x = 1$$

Funksjonen har et nullpunkt i $\langle 0, 3 \rangle$ så vi deler opp integralet.

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 2\cos\frac{\pi}{2}x\,dx = \left[\frac{4}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}x\right]_0^1 = \frac{4}{\pi}$$

Areal over x-aksen

$$\int_1^3 f(x)\,dx = \int_1^3 2\cos\frac{\pi}{2}x\,dx = \left[\frac{4}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}x\right]_1^3 = -\frac{8}{\pi}$$

Areal under x-aksen

Arealet av området er $\int_0^1 f(x)\,dx - \int_1^3 f(x)\,dx = \frac{4}{\pi} - \left(-\frac{8}{\pi}\right) = \frac{12}{\pi}$

EKSEMPEL 15

Funksjonen f og g er gitt ved $f(x) = x^2 - 1$ og $g(x) = 2x - 1$.
Finn arealet av området avgrenset av grafene til f og g.

Likningen $f(x) = g(x)$ gir $x = 0$ og $x = 2$. Førstekoordinatene til skjæringspunktene mellom grafene er da 0 og 2.

Av funksjonsuttrykket til f ser vi at grafen til f har et bunnpunkt. Grafen til g ligger derfor over grafen til f i intervallet $[0, 2]$. Arealet av området er da

$$\int_0^2 (g(x) - f(x))\,dx = \int_0^2 (2x - x^2)\,dx$$

$$= \left[x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^2$$

$$= \left(2^2 - \frac{1}{3}\cdot 2^3\right) - \left(0^2 - \frac{1}{3}\cdot 0^3\right)$$

$$= \frac{4}{3}$$

Til vurdering

15.67

Finn det bestemte integralet.

a $\int_{-1}^{1} 3x^2 \, dx$

b $\int_{0}^{2} (x^3 - 2x + 3) \, dx$

c $\int_{0}^{2} (t^3 - 2t + 3) \, dt$

d $\int_{7}^{7} x^8 \, dx$

15.68

Finn det bestemte integralet.

a $\int_{0}^{1} 3e^x \, dx$

b $\int_{0}^{\ln 2} e^{4x} \, dx$

c $\int_{1}^{2} \frac{2}{x} \, dx$

d $\int_{1}^{e} \frac{3}{x} \, dx$

15.69

Funksjonen f er gitt ved $f(x) = e^{-x}$.

a Finn et uttrykk for $\int_{0}^{t} f(x) \, dx$.

b Bestem $\lim_{t \to \infty} \int_{0}^{t} f(x) \, dx$.

c Finn $\int_{0}^{\infty} e^{-x} \, dx$ og $\int_{-\infty}^{0} e^{x} \, dx$?

15.70

Finn det bestemte integralet.

a $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \cos x \, dx$

b $\int_{1}^{2} \sin \pi x \, dx$

c $\int_{0}^{\pi} \left(\sin \frac{x}{3} - 3\cos 3x \right) dx$

d $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} \, dx$

15.71

Funksjonen f er gitt ved $f(x) = x^2 - 3x$.

a Finn nullpunktene til f.

b Finn arealet av området avgrenset av grafen til f og x-aksen.

c Finn arealet av området avgrenset av grafen til f, x-aksen og linjene $x = 2$ og $x = 6$.

d Finn arealet av området avgrenset av grafen til f, x-aksen og linjene $x = 4$ og $x = 10$.

e Finn arealet av området avgrenset av grafen til f og grafen til funksjonen g gitt ved $g(x) = -x^2 - 3x + 2$.

Tilvurdering

15.72

Funksjonen f er gitt ved $f(x) = \cos x$, $D_f = [0\,,\,\pi]$.
Regn ut arealet av området avgrenset av

a grafen til f, x-aksen og linjene $x = 0$ og $x = \frac{\pi}{2}$

b grafen til f, x-aksen og linjene $x = 0$ og $x = \frac{5\pi}{6}$

15.73

Regn ut $\int_0^{2\pi} \sin x \, dx$. Kommenter.

15.74

Punktene $(2\,,3)$ og $(1\,,-2)$ ligger på grafen til funksjonen f.
En annen funksjon g er definert slik at $g(x) = f'(x)$.

Regn ut $\int_1^2 g(x)\,dx$.

15.75

a Forklar at $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x \, dx = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Med 15 desimaler er $\frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}707\,106\,781\,186\,547$.

b Undersøk hvor god tilnærming du kan finne for $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ved å bruke numerisk integrasjon.

SNAKK

Diskuter hva som er galt med denne utregningen:

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{1} = -2$$

15.76

Finn integralet først eksakt. Undersøk deretter hvilken numerisk metode som gir best tilnærming av integralet, med det oppgitte antallet delintervaller n.

a $\int_0^4 x\,dx$, $n = 4$

b $\int_1^3 \frac{1}{x^2}\,dx$, $n = 4$

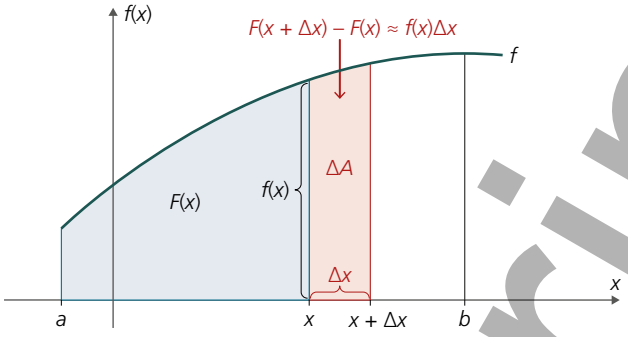
c $\int_0^{\pi} \sin x\,dx$, $n = 6$

d $\int_0^4 \sqrt{x}\,dx$, $n = 8$

Tilvurdering

Analysens fundamentalteorem

Figuren nedenfor viser *ideen* i beviset for analysens fundamentalteorem.



Arealet av det blå området er gitt ved

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

Den øvre grensen i integralet er *x*, og vi bruker derfor *t* som variabel når vi integrerer.

Det samlede arealet av det rosa og blå området er gitt ved

$$F(x+\Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Arealet av det rosa området, vil da være differansen mellom de to arealene ovenfor.

$$\Delta A = F(x+\Delta x) - F(x)$$

En tilnærming for ΔA er et rektangel med bredde Δx og høyde $f(x)$.

$$\Delta A \approx \Delta x \cdot f(x)$$

Vi setter de to uttrykkene for ΔA lik hverandre og omformer.

$$F(x+\Delta x) - F(x) \approx \Delta x \cdot f(x)$$

$$\frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} \approx f(x)$$

Vi deler med Δx.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = f(x)$$

Tilnærmingen blir bedre jo mindre Δx er. Vi lar derfor Δx gå mot 0.

$$F'(x) = f(x)$$

Vi gjenkjenner definisjonen av den deriverte på venstre side.

F er altså en antiderivert av *f*.

Overgangen fra tilnærmingsverdien i linje 2 til grenseverdien i linje 3 ovenfor krever et formelt bevis som vi ikke går inn på.

Til vurdering

RØDE OPPGAVER

15.77

Finn det ubestemte integralet.

a $\int 12x^3\,dx$ **b** $\int 8\cos 4x\,dx$ **c** $\int 6e^{3x}\,dx$ **d** $\int\left(1+\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t^3}\right)dt$

15.78

Finn det bestemte integralet.

a $\int_{-1}^{2}\left(x^2+4x+5\right)dx$ **b** $\int_{0}^{1}\left(e^x+3x^2+1\right)dx$ **c** $\int_{0}^{2\pi}\left(\sin x+\frac{1}{2}\right)dx$ **d** $\int_{0}^{1}2e^{-2x}\,dx$

15.79

En funksjon f er gitt ved $f(x)=8x-3$.

a Finn funksjonsuttrykket for alle antideriverte av f.

b Funksjonen G er en antiderivert av f. Finn funksjonsuttrykket $G(x)$ når $G(3)=30$.

c Funksjonen H er også en antiderivert av f. Finn $H(x)$ når $H(-1)=3$.

BLÅ OPPGAVER

15.80

Finn det ubestemte integralet.

a $\int\left(e^{\frac{x}{4}}-e^{-x}\right)dx$ **b** $\int\frac{2}{e^{2x}}\,dx$ **c** $\int\frac{x+2}{4x}\,dx$ **d** $\int\left(\sqrt{x}-\frac{2}{x^3}\right)dx$

15.81

Finn et uttrykk for funksjonen f når $f'(x)=2x+5$ og punktet $(2, 14)$ ligger på grafen til f.

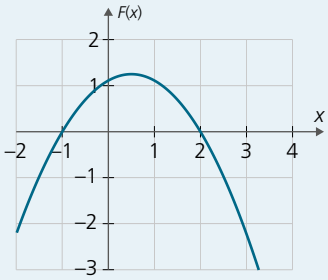
15.82

En tom beholder fylles med gass. Etter t timer er det $g(t)$ kg gass i beholderen.
Ved tidspunktet t strømmer det $g'(t)=225e^{-0{,}125t}$ kg gass per time inn i beholderen.
Finn funksjonsuttrykket $g(t)$.

15.83

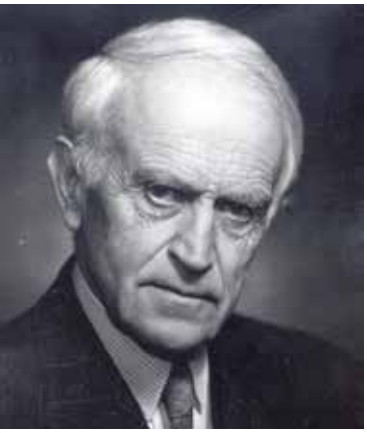
Figuren til høyre viser grafen til en funksjon F.
Om en annen funksjon f får du vite at $f(x)=F'(x)$.

a Finn $\int_{-2}^{2}f(x)\,dx$. **b** Bestem k slik at $\int_{-2}^{k}f(x)\,dx=0$.



Til vurdering

15E Integrasjonsmetoder



Det er enklest å finne ubestemte integraler når vi kan gjenkjenne antideriverte direkte. Hvis vi for eksempel deriverer med produktregelen eller kjerneregelen, er det ikke alltid like lett å gjenkjenne funksjonen vi deriverte ved å se på resultatet. Vi skal ta for oss tre metoder vi kan bruke i disse tilfellene.

Den norske matematikeren Viggo Brun (1885–1978) blir tilskrevet dette sitatet:

> *«Derivasjon er et håndverk,*
> *integrasjon er en kunst!»*

Det kan være vanskelig å velge riktig metode når du skal integrere.
Men, hold ut – med erfaring går det bedre etter hvert!

Delvis integrasjon

Vi skal utlede en metode for integrasjon som bygger på derivasjonsregelen for et produkt: $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$.
Som i kapittel 8 skriver vi gjerne u og v i stedet for $u(x)$ og $v(x)$.

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$u' \cdot v + u \cdot v' = (u \cdot v)'$$ **Vi lar høyre og venstre side bytte plass.**

$$\int (u' \cdot v + u \cdot v')\,\mathrm{d}x = u \cdot v + C$$ **Vi integrerer på begge sider av likningen.**

$$\int u' \cdot v\,\mathrm{d}x + \int u \cdot v'\,\mathrm{d}x = u \cdot v + C$$ **Vi skriver venstre side som en sum av to integraler.**

$$\int u' \cdot v\,\mathrm{d}x = u \cdot v - \int u \cdot v'\,\mathrm{d}x + C$$

Siden integralet på høyresiden også gir en konstant, kan vi inkludere C i dette integralet og derfor sløyfe den i formelen.

Delvis integrasjon

$$\int u' \cdot v\,\mathrm{d}x = u \cdot v - \int u \cdot v'\,\mathrm{d}x$$

Merk!
Når vi bruker delvis integrasjon, ønsker vi at integralet på høyre side blir *enklere* enn integralet på venstre side. Hvis det ikke skjer, bytter vi om på hvilken av faktorene i integranden vi kaller u' og v.

Tilvurdering

EKSEMPEL 15

Finn $\int 2x \cdot \ln x \, dx$.

Vi bruker delvis integrasjon med $u' = 2x$ og $v = \ln x$.

Da er $u = x^2$ og $v' = \frac{1}{x}$.

$$\int \underbrace{2x}_{u'} \cdot \underbrace{\ln x}_{v} \, dx = \underbrace{x^2}_{u} \cdot \underbrace{\ln x}_{v} - \int \underbrace{x^2}_{u} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{v'} \, dx$$

$$= x^2 \ln x - \int x \, dx \qquad x^2 \cdot \frac{1}{x} = x$$

$$= x^2 \ln x - \left(\frac{1}{2}x^2 + C_1\right)$$

$$= x^2 \ln x - \frac{1}{2}x^2 + C \qquad C = -C_1$$

EKSEMPEL 16

Finn $\int_0^1 e^{2x} \cdot (2x - 1) \, dx$.

Vi finner først det ubestemte integralet ved delvis integrasjon.
Vi setter $u' = e^{2x}$ og $v = 2x - 1$.

Da er $u = \frac{1}{2}e^{2x}$ og $v' = 2$.

$$\int \underbrace{e^{2x}}_{u'} \cdot \underbrace{(2x - 1)}_{v} \, dx = \underbrace{\frac{1}{2}e^{2x}}_{u} \cdot \underbrace{(2x - 1)}_{v} - \int \underbrace{\frac{1}{2}e^{2x}}_{u} \cdot \underbrace{2}_{v'} \, dx$$

$$= \frac{1}{2}e^{2x} \cdot (2x - 1) - \int e^{2x} \, dx$$

$$= \frac{1}{2}e^{2x} \cdot (2x - 1) - \frac{1}{2}e^{2x} + C$$

$$= \frac{1}{2}e^{2x} \cdot (2x - 1 - 1) + C$$

$$= e^{2x} \cdot (x - 1) + C$$

Så finner vi det bestemte integralet.

$$\int_0^1 e^{2x} \cdot (2x - 1) \, dx = \left[e^{2x} \cdot (x - 1)\right]_0^1$$

$$= e^2 \cdot 0 - e^0 \cdot (-1)$$

$$= 1$$

Til vurdering

15.84
Bruk delvis integrasjon til å finne integralet.

a $\int 4x \cdot \ln x \, dx$ **b** $\int_0^1 e^x \cdot x \, dx$ **c** $\int 3x^2 \cdot \ln x \, dx$ **d** $\int x \cdot \sin x \, dx$

15.85
Bruk delvis integrasjon til å finne integralet.

a $\int e^{2x} \cdot 4x \, dx$ **b** $\int \frac{1}{x^2} \cdot \ln x \, dx$ **c** $\int_1^e (2x-1) \cdot \ln x \, dx$ **d** $\int_0^\pi 2x \cdot \cos x \, dx$

15.86
Vis at $\int \ln x \, dx = x \ln x - x + C$
a ved derivasjon
b ved delvis integrasjon (Tips: $\ln x = 1 \cdot \ln x$)

SNAKK

Lea har regnet slik:

$$\int 3x^2 \cdot e^x \, dx = x^3 \cdot e^x + C$$

Firat mener at Lea har regnet feil. Hvordan kan han begrunne det?

UTFORSK

Bjørn skal finne integralet $\int 2x \cdot e^x \, dx$.
Han prøver delvis integrasjon med $u' = 2x$ og $v = e^x$, men da får han et nytt integral som er mye vanskeligere!
Ingrid foreslår å heller velge $u' = e^x$ og $v = 2x$. Hun mener at hvis den ene funksjonen er en polynomfunksjon, bør den alltid velges som v, og den andre funksjonen som u'.
Vurder Ingrids påstand. Er den alltid riktig?

Jeg finner ikke $\int e^x \cdot x^2 \, dx$, enda jeg valgte å sette x^2 som v, sier Anders.

Jeg får $\int e^x \cdot x^2 \, dx = e^x \cdot x^2 - \int e^x \cdot 2x \, dx$.
Men integralet på høyre side er jo det samme som Ingrid hjalp meg med, sier Bjørn. Kanskje du kan bruke delvis integrasjon to ganger?
Undersøk Bjørns forslag.

15.87
Bruk delvis integrasjon til å finne det ubestemte integralet.
a $\int 4x \cdot e^x \, dx$ **b** $\int \ln x \cdot 6x^2 \, dx$ **c** $\int (2x-1) \cdot e^x \, dx$

15.88
Bruk delvis integrasjon til å finne det ubestemte integralet.
a $\int e^x \cdot 2x^2 \, dx$ **b** $\int e^x \cdot \left(x^2 - 1\right) dx$ **c** $\int x(\ln x)^2 \, dx$

Til vurdering

UTFORSK

Siv og Frode skal finne det ubestemte integralet $\int \sin^2 x \, dx$.

Siv gjør slik:

$$\int \sin^2 x \, dx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x \right) dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x + C$$

Frode gjør slik:

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x \, dx &= \int \sin x \cdot \sin x \, dx \\ &= -\sin x \cdot \cos x - \int \cos x \cdot \cos x \, dx \\ &= -\sin x \cdot \cos x + \int (1 - \sin^2 x) \, dx \\ &= -\sin x \cdot \cos x + \int 1 \, dx - \int \sin^2 x \, dx \end{aligned}$$

Dette gir

$$2 \int \sin^2 x \, dx = -\sin x \cdot \cos x + \int 1 \, dx$$

$$\int \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2}(x - \sin x \cdot \cos x) + C$$

Forklar framgangsmåtene trinn for trinn.
Vis at Siv og Frode har kommet fram til det samme resultatet.

Integrasjon med variabelskifte – substitusjon

Integrasjon ved variabelskifte bygger på kjerneregelen for derivasjon. Metoden går ut på å skifte variabelen i et vanskelig integral fra x til en kjerne u for å få et enklere integral. For å klare dette må vi innføre differensialet du.
På kapittelforsiden kan du lese om Leibniz' skrivemåte for den deriverte av en funksjon f med hensyn på variabelen x:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} \quad \text{eller} \quad f'(x) = \frac{df}{dx}$$

Når vi bruker kjerneregelen for derivasjon, kaller vi som regel kjernen u. Med Leibniz' skrivemåte kan vi skrive den deriverte av kjernen med hensyn på x slik:

$$u' = \frac{du}{dx}$$

Dette kan vi omforme til $du = u' \, dx$ eller $dx = \frac{du}{u'}$.
Nå kan vi omforme et vanskelig integral $\int f(x) \, dx$ til et enklere integral $\int g(u) \, du$.

Til vurdering

Integrasjon ved variabelskifte (substitusjon)

1. Velg en kjerne u.
2. Bestem u'.
3. Erstatt dx med $\frac{du}{u'}$.
4. Forkort slik at u er den eneste variabelen.
5. Integrer med u som variabel.
6. Sett inn for u, slik at svaret blir en funksjon av x.

Hvis det ikke lar seg gjøre å velge en kjerne u slik at forkortingen i ❹ er mulig, fører ikke integrasjon ved variabelskifte fram.

EKSEMPEL 17

Finn $\int 4x\,e^{x^2}\,dx$.

Vi velger $u = x^2$ som kjerne.
Det gir $u' = 2x$ og dermed $dx = \frac{du}{2x}$.
Vi setter inn og får

$$\begin{aligned}\int 4x\,e^{x^2}\,dx &= \int 4x\,e^{u}\,\frac{du}{2x}\\ &= \int \frac{4x}{2x}e^{u}\,du\\ &= \int 2e^{u}\,du\\ &= 2\int e^{u}\,du\\ &= 2e^{u} + C\\ &= 2e^{x^2} + C\end{aligned}$$

15.89

Bruk variabelskifte og finn integralet

a $\int 3x^2\,e^{x^3}\,dx$ ved å velge eksponenten i eksponentialfunksjonen som kjerne

b $\int \frac{8}{x}\cdot(\ln x)^3\,dx$ ved å velge grunntallet i potensen som kjerne

c $\int \frac{x}{x^2+4}\,dx$ ved å velge nevneren i brøken som kjerne

d $\int 2x\cdot\sqrt{1+x^2}\,dx$ ved å velge radikanden som kjerne

e $\int \cos^2 x\cdot\sin x\,dx$ ved å velge grunntallet i potensen som kjerne.

Tilvurdering

15.90

Finn integralet ved et passende variabelskifte.

a $\int 3e^{3x+5}\,dx$ **b** $\int \frac{6}{3x+5}\,dx$ **c** $\int \frac{x^2}{x^3+1}\,dx$ **d** $\int 6x^3 e^{x^4}\,dx$

e $\int x\cdot\sin(x^2)\,dx$ **f** $\int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx$ **g** $\int \frac{2\cos x}{3+\sin x}\,dx$ **h** $\int \sin^5 x\cdot\cos x\,dx$

15.91

a Bestem $\int \frac{\ln x}{x}\,dx$ ved variabelskifte.

b Finn $\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx$.

15.92

Finn integralet ved et passende variabelskifte.

a $\int \frac{e^x}{e^x-1}\,dx$ **b** $\int 3\sqrt{2t+3}\,dt$ **c** $\int x e^{-x^2}\,dx$

d $\int_{-1}^{0} x^2\left(x^3-1\right)^4\,dx$ **e** $\int_0^1 \frac{4x+3}{2x^2+3x+1}\,dx$ **f** $\int \frac{2x}{x^2+3}\cdot\ln(x^2+3)\,dx$

15.93

Bruk definisjonen av tangens til å vise at $\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x| + C$.

15.94

Finn integralet $\int \cos x\cdot\sin x\,dx$

a ved variabelskifte

b ved delvis integrasjon

15.95 (Eksamen Forkurset 2017)

Finn integralet.

a $\int \frac{2+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}\,dx$ **b** $\int_0^\infty x e^{1-x^2}\,dx$

SNAKK

Argumenter for om vi bør velge delvis integrasjon eller variabelskifte for å finne integralene.

a $\int \frac{x}{5x^2-3}\,dx$ **b** $\int x e^{x^2}\,dx$ **c** $\int x e^x\,dx$

d $\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx$ **e** $\int \frac{\ln x}{x}\,dx$ **f** $\int x\ln x\,dx$

Kan vi løse noen av integralene både med delvis integrasjon og variabelskifte?

Tilvurdering

Integrasjon ved delbrøkoppspalting

Integralet $\int \frac{1}{ax+b}\,dx$

Vi velger $u = ax + b$. Da er $u' = a$, og dermed er $dx = \frac{1}{a}du$.
Integrasjon ved variabelskifte gir

$$\int \frac{1}{ax+b}\,dx = \int \frac{1}{u}\cdot\frac{1}{a}\,du = \frac{1}{a}\int \frac{1}{u}\,du = \frac{1}{a}\ln|u| + C = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C$$

$$\int \frac{1}{ax+b}\,dx = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C \qquad \left(x \neq -\frac{b}{a}\right)$$

EKSEMPEL 18

Finn $\int\left(\frac{4}{x+5} + \frac{1}{2x-3}\right)dx$.

Vi integrerer ledd for ledd og får

$$\int\left(\frac{4}{x+5} + \frac{1}{2x-3}\right)dx = 4\ln|x+5| + \frac{1}{2}\ln|2x-3| + C$$

15.96
Finn det ubestemte integralet.

a $\int \frac{1}{x+3}\,dx$ **b** $\int \frac{1}{4-x}\,dx$ **c** $\int \frac{1}{5x+2}\,dx$ **d** $\int\left(\frac{1}{x+4} - \frac{1}{x-4}\right)dx$

Delbrøkoppspalting

SNAKK

Forklar at $\frac{x+2}{x} = 1 + \frac{2}{x}$.

Finn integralet $\int \frac{x+2}{x}\,dx$.

Når vi skriver om $\frac{x+2}{x}$ til $1 + \frac{2}{x}$, gjør vi en *delbrøkoppspalting*.

Det er å skrive en brøk som en sum av enklere brøker. Hvis integranden i et integral er en brøk, vil vi ofte måtte skrive om på en slik måte.

Til vurdering

EKSEMPEL 19

Finn $\int \frac{2x^2-7x-5}{x-3}\,dx$.

Vi bruker restdivisjon til å skrive om integranden.

$$(2x^2-7x-5):(x-3)=2x-1+\frac{-8}{x-3}$$

$$\begin{aligned}
&-(\underline{2x^2-6x})\\
&\qquad -x-5\\
&\qquad -(\underline{-x+3})\\
&\qquad\qquad -8
\end{aligned}$$

$$\frac{2x^2-7x-5}{x-3}=2x-1-\frac{8}{x-3}$$

Altså får vi

$$\begin{aligned}
\int \frac{2x^2-7x-5}{x-3}\,dx &= \int\left(2x-1-\frac{8}{x-3}\right)dx\\
&= x^2-x-8\cdot\ln|x-3|+C
\end{aligned}$$

15.97

Finn integralet.

a $\int \frac{3x^2-6x}{x+1}\,dx$ **b** $\int \frac{x^2-8x+16}{x-10}\,dx$ **c** $\int \frac{x^3-3x^2-5x+16}{x^2-2x-8}\,dx$

Vi kan bare bruke polynomdivisjon hvis graden til telleren har høyere grad eller samme grad som nevneren.

Vi skal vise hvordan vi utfører en delbrøkoppspalting av uttrykk hvor nevneren har høyest grad, og hvor nevneren har to eller flere ledd.

Vi kan for eksempel omskrive $\frac{8x-4}{x^2-4}$ til $\frac{5}{x+2}+\frac{3}{x-2}$.

Hvis vi kan skrive nevneren i en brøk som et produkt av forskjellige førstegradsfaktorer, kan vi skrive brøken som en sum av delbrøker der førstegradsfaktorene er nevnerne.

Vi bruker $\frac{8x-4}{x^2-4}$ som eksempel. Her er nevneren $x^2-4=(x+2)\cdot(x-2)$.

Derfor får vi to delbrøker, med $x+2$ og $x-2$ som nevnere.

Vi må bestemme to konstanter A og B, slik at

$$\frac{8x-4}{x^2-4}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-2}$$

Tilvurdering

Vi utvider brøkene på høyre side slik at de får samme nevner som på venstre side. Det gir

$$\frac{8x-4}{x^2-4}=\frac{A(x-2)}{(x+2)(x-2)}+\frac{B(x+2)}{(x-2)(x+2)}$$

Vi setter tellerne lik hverandre og får

$$8x-4=A(x-2)+B(x+2)$$

Denne likningen skal gjelde for alle x.

For å finne A setter vi inn –2 for x:

$$\begin{aligned}8\cdot(-2)-4&=A(-2-2)+B(-2+2)\\-20&=-4A\\A&=5\end{aligned}$$

For å finne B setter vi inn 2 for x:

$$\begin{aligned}8\cdot 2-4&=A(2-2)+B(2+2)\\12&=4B\\B&=3\end{aligned}$$

Merk at x i brøkene må være forskjellig fra –2 og 2, da det gir 0 i nevnerne. Vi kan likevel sette $x=\pm 2$ som verdier i likningen $8x-4=A(x-2)+B(x+2)$ for å bestemme A og B.

Dette viser at $\frac{8x-4}{x^2-4}=\frac{5}{x+2}+\frac{3}{x-2}$.

Integrasjon ved delbrøkoppspalting

La P og Q være polynomfunksjoner med grad p og q, slik at $p<q$.

Da kan vi skrive brøken $\frac{P(x)}{Q(x)}$ som en sum av q delbrøker.

$\int\frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$ er summen av integralene av delbrøkene.

Framgangsmåte:

1. Faktoriser $Q(x)$ i q førstegradsfaktorer.
2. Skriv brøken $\frac{P(x)}{Q(x)}$ som en sum av q delbrøker der tellerne er reelle tall A, B, C, ... og nevnerne er førstegradsfaktorene til $Q(x)$.
3. Utvid delbrøkene og sammenlikn tellerne for å bestemme A, B, C, ...
4. Finn $\int\frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$ som summen av integralene av delbrøkene.

Merk!

Hvis telleren i brøken har samme grad som nevneren eller høyere grad enn nevneren, må vi dele opp brøken på andre måter, slik som i Snakk på side 000 eller ved å gjøre en polynomdivisjon (restdivisjon).

Tilvurdering

EKSEMPEL 20

Finn $\int \frac{4}{9x^2-1}\,dx$.

Nevneren kan vi skrive som et produkt av to førstegradsfaktorer:

$$9x^2-1=(3x+1)\cdot(3x-1)$$

Vi bestemmer to reelle tall A og B slik at

$$\frac{4}{9x^2-1}=\frac{A}{3x+1}+\frac{B}{3x-1}$$

Vi utvider delbrøkene på høyre side og sammenlikner tellerne. Det gir

$$4=A(3x-1)+B(3x+1)$$

Vi setter inn $-\frac{1}{3}$ for x for å finne A. Det gir

$$4=A(-1-1)+B(-1+1)$$
$$4=-2A$$
$$A=-2$$

Vi setter inn $\frac{1}{3}$ for x for å finne B. Det gir

$$4=A(1-1)+B(1+1)$$
$$4=2B$$
$$B=2$$

Altså får vi

$$\int \frac{4}{9x^2-1}\,dx=\int\left(\frac{-2}{3x+1}+\frac{2}{3x-1}\right)dx$$
$$=-\frac{2}{3}\ln|3x+1|+\frac{2}{3}\ln|3x-1|+C$$
$$=\frac{2}{3}\ln\left|\frac{3x-1}{3x+1}\right|+C$$

$\int \frac{1}{ax+b}\,dx=\frac{1}{a}\ln|ax+b|+C$

2. logaritmesetning: $\ln a-\ln b=\ln\frac{a}{b}$

Til vurdering

15.98

a Regn ut $(x-2)\cdot(x-1)$.

b Skriv $\dfrac{x}{x^2-3x+2}$ som en sum av to delbrøker.

c Finn $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-3x+2}\,dx$.

d Vis at $\displaystyle\int_3^4 \frac{x}{x^2-3x+2}\,dx = \ln\frac{8}{3}$.

15.99

Finn integralet ved delbrøkoppspalting.

a $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-4}\,dx$

b $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+x}\,dx$

c $\displaystyle\int \frac{2x+3}{4x^2-1}\,dx$

d $\displaystyle\int_2^5 \frac{2x}{x^2-1}\,dx$

SNAKK

Argumenter for om vi bør velge delbrøkoppspalting eller variabelskifte for å finne integralet.

a $\displaystyle\int \frac{x}{5x^2-3}\,dx$

b $\displaystyle\int \frac{6x+15}{x^2+5x+3}\,dx$

c $\displaystyle\int \frac{6x}{x^2+5x+3}\,dx$

d $\displaystyle\int \frac{4x}{x^2-4}\,dx$

e $\displaystyle\int \frac{x+1}{5x^2-3}\,dx$

f $\displaystyle\int \frac{5x^2-3}{x}\,dx$

Hvilke av integralene kan vi løse med både delbrøkoppspalting og variabelskifte?

Til vurdering

RØDE OPPGAVER

15.100
Finn integralet.

a $\int \frac{x^2-4}{x}\,dx$ **b** $\int \frac{x}{x^2+1}\,dx$ **c** $\int \frac{2}{x^2-1}\,dx$ **d** $\int_3^5 \frac{2x}{x^2-1}\,dx$

15.101
Finn integralet.

a $\int \frac{\ln x}{x}\,dx$ **b** $\int x\ln x\,dx$ **c** $\int \frac{1}{x\ln x}\,dx$ **d** $\int_1^3 x^2\ln x\,dx$

15.102
Finn integralet.

a $\int_0^1 2xe^x\,dx$ **b** $\int xe^{4x}\,dx$ **c** $\int xe^{x^2}\,dx$ **d** $\int \sqrt{2x+4}\,dx$

15.103
Finn integralene.

a $\int 8\cos 4x\,dx$ **b** $\int x\cdot\cos 2x\,dx$ **c** $\int x\cdot\cos(x^2)\,dx$ **d** $\int \sin^2 x\cdot\cos x\,dx$

BLÅ OPPGAVER

15.104
Finn integralet.

a $\int \frac{x}{x^2-\pi^2}\,dx$ **b** $\int \frac{t+6}{t^2+12t-3}\,dt$ **c** $\int_3^5 \frac{2x^2}{x^2-1}\,dx$ **d** $\int \frac{8}{x^3-4x}\,dx$

15.105
Finn integralet.

a $\int \ln\sqrt{x}\,dx$ **b** $\int \frac{e^x}{e^{2x}-1}\,dx$ **c** $\int e^{\sqrt{x}}\,dx$ **d** $\int \frac{e^{2t}+e^{-t}}{2e^t}\,dt$

15.106
Finn integralet.

a $\int x\cdot\sqrt{2+x}\,dx$ **b** $\int e^x\cdot\sin x\,dx$ **c** $\int \sqrt{x}\cdot\ln x\,dx$ **d** $\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx$

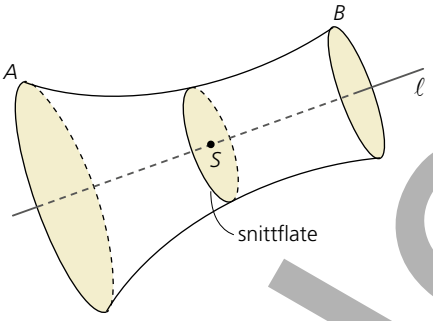
15.107
Finn integralet.

a $\int \cos^2 x\,dx$ **b** $\int \frac{(\ln x)^2}{x}\,dx$ **c** $\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx$ **d** $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$

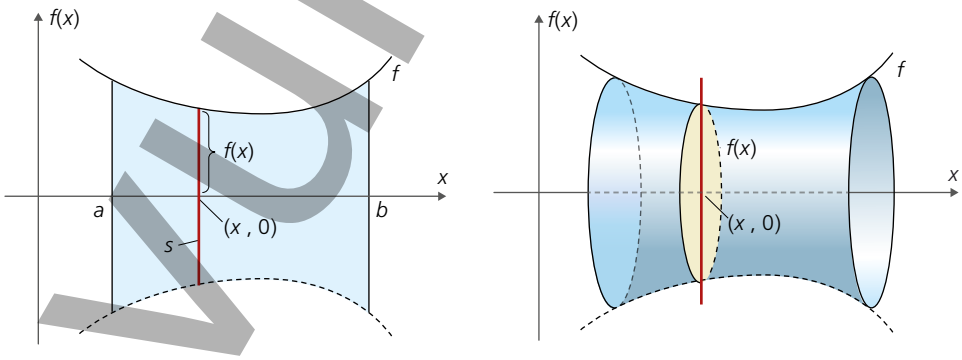
Til vurdering

15F Volum ved integrasjon

Tregjenstander laget i dreiebenker og keramikkgjenstander laget på dreieskiver er eksempler på *omdreiningslegemer*. Snittflaten mellom omdreiningslegemet og et plan vinkelrett på omdreiningsaksen er en sirkel.



Vi ser på grafen til funksjonen f på figuren til venstre nedenfor. Hvis vi tenker oss at grafen til f blir dreid 360° med x-aksen som omdreiningsakse, framkommer et omdreiningslegeme.



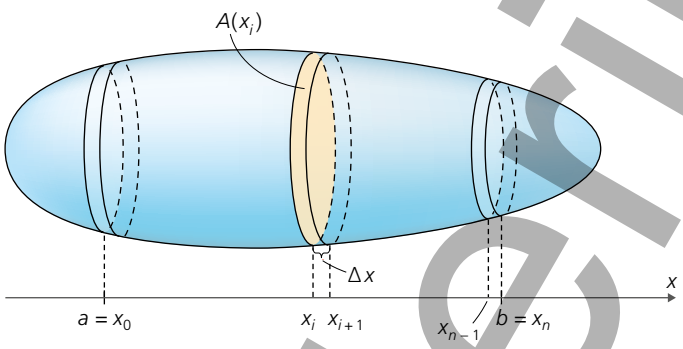
Til høyre ser du omdreiningslegemet i perspektiv.
Et plan vinkelrett på x-aksen gjennom punktet $(x\ ,0)$ skjærer omdreiningslegemet. Snittet blir en sirkel med radius $r = f(x)$, se figuren til høyre. På figuren til venstre ser vi snittet som det fargede linjestykket s.
Arealet av den gule snittflaten er da $\pi\big(f(x)\big)^2$.

Til vurdering

Volum av omdreiningslegemer

Hvis du deler opp et hardkokt egg med en eggdeler, får du skiver.
Volumet av egget er lik summen av volumene av de enkelte skivene.

Tilsvarende kan vi tenke oss at vi deler opp et omdreiningslegeme i skiver, og finner volumet av legemet ved å summere volumet av skivene.



Vi vil finne volumet V av romfiguren ovenfor mellom $x = a$ og $x = b$.

Vi tenker oss da at den er delt opp i n skiver, hver med tykkelse $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$.

Alle snittflatene står vinkelrett på x-aksen.
Avstandene fra origo til snittflatene er $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$,
der $x_0 = a$ og $x_n = b$.
I hvert intervall velger vi en verdi for x, som vi kaller x_i^*.
Arealet av snittflaten ved x_i^* kaller vi $A(x_i^*)$.
Samlet volum av skivene er tilnærmet lik summen av volumet av hver skive

$$A(x_1^*)\cdot\Delta x + A(x_2^*)\cdot\Delta x + A(x_3^*)\cdot\Delta x + \ldots + A(x_n^*)\cdot\Delta x = \sum_{i=1}^{n} A(x_i^*)\cdot\Delta x$$

Dette kjenner vi igjen som en riemannsum.
Jo flere skiver vi deler volumet i, desto mindre blir forskjellen på denne summen og volumet V. Etter definisjonen av det bestemte integralet får vi da

$$V = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} A(x_i^*)\cdot\Delta x = \int_a^b A(x)\,\mathrm{d}x$$

Arealet av snittflaten er en sirkel med radius $r = f(x)$.
Da er $A(x) = \pi\cdot r^2 = \pi\cdot\big(f(x)\big)^2$.

Derfor er volumet gitt ved

$$\int_a^b A(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \pi\cdot\big(f(x)\big)^2\,\mathrm{d}x = \pi\int_a^b \big(f(x)\big)^2\,\mathrm{d}x$$

Tilvurdering

Volum av et omdreiningslegeme om *x*-aksen

La f være en kontinuerlig funksjon i intervallet $[a\ ,\ b]$. Når vi dreier grafen i intervallet 360° om x-aksen, framkommer det et omdreiningslegeme med volumet

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2\,\mathrm{d}x$$

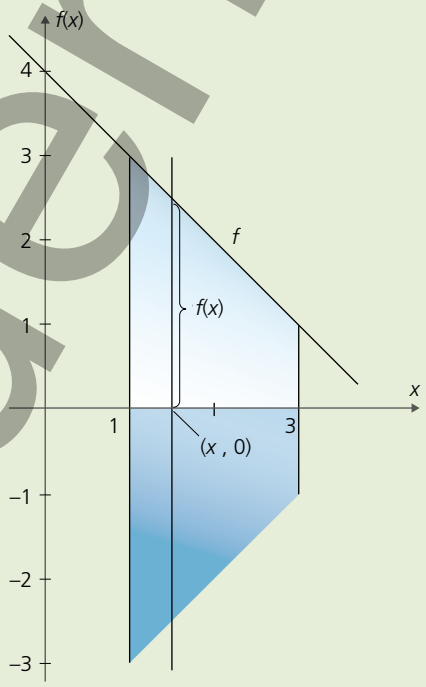
EKSEMPEL 21

På figuren har vi tegnet grafen til en funksjon f gitt ved $f(x) = -x + 4$.

Grafen til f, x-aksen og linjene $x = 1$ og $x = 3$ avgrenser et flatestykke. Det er vist med lyseblått i figuren.

Når dette flatestykket dreies 360° om x-aksen, framkommer en romfigur som kalles en *avkortet kjegle*. Tverrsnittet i den avkortede kjegla er vist med lyseblått og mørkeblått i figuren.

Finn den eksakte verdien av volumet av denne romfiguren.



Vi får det samme volumet når vi dreier flatestykket om x-aksen som ved å dreie grafen til f i intervallet $[1\ ,\ 3]$ om x-aksen. Volumet er derfor gitt ved

$$\begin{aligned}
\pi \int_1^3 (f(x))^2\,\mathrm{d}x &= \pi \int_1^3 (-x+4)^2\,\mathrm{d}x \\
&= \pi \int_1^3 \left(x^2 - 8x + 16\right)\mathrm{d}x \\
&= \pi \left[\frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 16x\right]_1^3 \\
&= \pi \left(\frac{1}{3}\cdot 3^3 - 4\cdot 3^2 + 16\cdot 3 - \left(\frac{1}{3}\cdot 1^3 - 4\cdot 1^2 + 16\cdot 1\right)\right) \\
&= \frac{26}{3}\pi
\end{aligned}$$

Til vurdering

15.108

Et omdreiningslegeme framkommer ved at grafen til funksjonen f blir dreid 360° om førsteaksen. Finn volumet av omdreiningslegemet når

a $f(x) = 3x$ og $D_f = [1, 2]$

b $f(x) = \sqrt{2x+3}$ og $D_f = [1, 4]$

c $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$ og $D_f = [3, 7]$

d $f(x) = x + 1$ og $D_f = [2, 5]$

e $f(x) = e^x$ og $D_f = [0, \ln 3]$

f $f(x) = \sin x$, $D_f = \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

15.109

Hvis den rette linja $y = 2x$ fra $x = -5$ til $x = 5$ blir dreid 360° om førsteaksen, får vi en *dobbeltkjegle*. Finn volumet av denne romfiguren og lag en skisse av den.

15.110

En funksjon g er gitt ved $g(x) = \sqrt{25 - x^2}$.

a Grafen til g og x-aksen avgrenser et flatestykke som vi dreier om x-aksen. Hvilken romfigur får vi?

b Bestem volumet av romfiguren i oppgave a på to måter.

15.111 (Eksamen Forkurset 2015)

Vi skal designe en vase med utgangspunkt i grafen til funksjonen

$$f(x) = \frac{1}{2x}.$$

Vaseformen oppnås ved å la grafen til f mellom $x = 1$ dm og $x = 4$ dm danne konturen til et omdreiningslegeme om x-aksen. Hvor mye vann vil vasen kunne romme når konturen gir oss de indre veggene i vasen?

15.112

Funksjonene f og g er gitt ved

$$f(x) = x^2 \text{ og } g(x) = 4 - 3x^2$$

a Finn koordinatene til skjæringspunktene mellom grafene til f og g.

b Finn volumet av «ringen» som framkommer når flatestykket avgrenset av grafene til f og g dreies 360° om x-aksen.

15.113

Funksjonen f er gitt ved $f(x) = \frac{1}{2}\cos x + 1$, $D_f = [0, 2\pi]$.

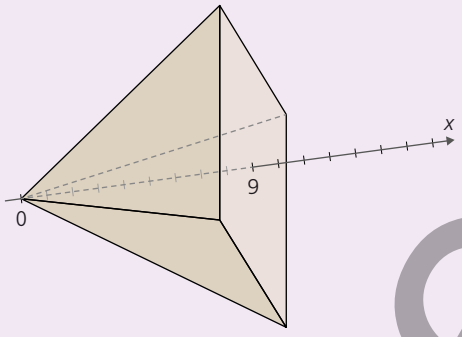
Vi setter V lik volumet av omdreiningslegemet som framkommer ved at grafen til f blir dreid 360° om x-aksen.

Finn volumet V.

Tilvurdering

UTFORSK

Vi kan bruke integrasjon til å finne volumet av legemer i enkelte tilfeller der legemene ikke er omdreiningslegemer.
Vi vil finne volumet av en pyramide med kvadratisk grunnflate slik figuren viser. x-aksen går gjennom toppunktet på pyramiden og står vinkelrett på grunnflaten. Arealet (målt i cm^2) av snittflaten x cm fra toppunktet er gitt ved $A(x) = x^2$.



a Finn volumet av pyramiden
  1 ved å bruke integrasjon
  2 ved å bruke volumformelen fra geometrien: $V = \frac{1}{3}Gh$

b Gi eksempler på andre legemer vi kunne ha funnet volumet av på tilsvarende måte.

Til vurdering

RØDE OPPGAVER

15.114

Funksjonen f er gitt ved $f(x) = \sqrt{\frac{3}{\pi}} \cdot x$, $D_f = [2, 3]$.

Finn volumet av omdreiningslegemet vi får når grafen til f blir dreid 360° om x-aksen.

15.115

Funksjonen f er gitt ved $f(x) = 3x + 1$.
Et flatestykke er avgrenset av grafen til f, x-aksen og linjene $x = 1$ og $x = 2$.
Finn volumet av omdreiningslegemet vi får når vi dreier flatestykket 360° om x-aksen.

15.116

Et flatestykke er avgrenset av grafene til f og g gitt ved $f(x) = 8 - x^2$ og $g(x) = x^2$.
Finn volumet av omdreiningslegemet vi får når vi dreier flatestykket 360° om x-aksen.

BLÅ OPPGAVER

15.117

Funksjonen f er gitt ved $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^x$.

Et flatestykke er avgrenset av grafen til f, x-aksen, y-aksen og linja $x = \ln 3$.
Finn volumet av omdreiningslegemet vi får når vi dreier flatestykket 360° om x-aksen.

15.118

Funksjonen f er gitt ved $f(x) = \sin 2x \cdot \sqrt{\cos 2x}$, $D_f = \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

Bestem volumet av omdreiningslegemet vi får når grafen til f blir dreid 360° om x-aksen.

15.119

Funksjonen f er gitt ved $f(x) = \frac{2}{x}$.

Et flatestykke er avgrenset av grafen til f, x-aksen og linjene $x = 1$ og $x = t$, der $t > 1$.

a Finn volumet $V(t)$ av omdreiningslegemet vi får når vi dreier flatestykket 360° om x-aksen.

b Vis at $\lim_{t \to \infty} V(t) = 4\pi$, og forklar hva dette betyr.

15.120

Funksjonen f er gitt ved $f(x) = \ln(x + 1)$.
Et flatestykke er avgrenset av grafen til f, y-aksen og linja $y = 2$.
Bruk en numerisk metode til finne tilnærmet verdi for volumet av gjenstanden vi får når vi dreier flatestykket 360° om x-aksen. Gi svaret med én desimal.

Tilvurdering

SAMMENDRAG

Det ubestemte integralet

$\int f(x)\,dx = F(x) + C$, der $F'(x) = f(x)$ og $C \in \mathbb{R}$

$\int k \cdot u(x)\,dx = k\int u(x)\,dx \qquad (k \in \mathbb{R})$

$\int (u(x) \pm v(x))\,dx = \int u(x)\,dx \pm \int v(x)\,dx$

$\int x^r\,dx = \frac{1}{r+1}x^{r+1} + C \qquad (r \neq -1)$

$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C \qquad (x \neq 0)$

$\int \frac{1}{ax+b}\,dx = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C \qquad \left(x \neq -\frac{b}{a}\right)$

$\int e^{kx}\,dx = \frac{1}{k}e^{kx} + C$

$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$

$\int \cos x\,dx = \sin x + C$

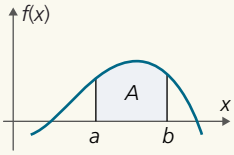
$\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x| + C$

Det bestemte integralet

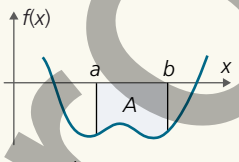
$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot\Delta x$, der $\Delta x = \frac{b-a}{n}$

$\int_a^b f(x)\,dx = [K(x)]_a^b = K(b) - K(a)$, der $K'(x) = f(x)$

Areal og integral



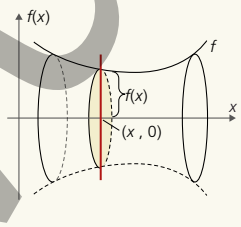
$A = \int_a^b f(x)\,dx$



$A = -\int_a^b f(x)\,dx$

Volum av omdreiningslegeme

$V = \pi\int_a^b (f(x))^2\,dx$



Integrasjonsmetoder

Delvis integrasjon
Integrasjon ved variabelskifte
Integrasjon ved delbrøkoppspalting

Numeriske integrasjonsmetoder

Rektangelmetoden
Trapesmetoden
Simpsons metode

Tilvurdering